교육 오피니언·시민 100인 초청

6개국 수학 교육과정 국제 비교 컨퍼런스

일시 2015년 5월 28일 목요일 오전 10시 – 오후 6시

장소 백범김구기념관 대회의실

사교육걱정없는세상

6개국 수학 교육과정 국제비교 컨퍼런스 일정

일 정	시간	주 제	발제 및 논찬자
10:00–10:30	**개회**	**사회** 윤지희 (사교육걱정없는세상 공동대표)	
		인사말/격려사/참석자 소개	**인사말** 손봉호 (사교육걱정없는세상 이사장) **축사** 황우여 (사회부총리) 박홍근 (국회의원) 조희연 (서울시 교육감)
10:30–12:30	**종합 세션**	**사회** 송인수 (사교육걱정없는세상 공동대표)	
		6개국 수학 교육과정 종합 비교 분석 및 한국 수학교육에 대한 제언	**발제** 최수일 (수학사교육포럼 대표) **논찬** 박경미 (홍익대학교 교수) 이동흔 (전국수학교사모임 회장) 유재봉 (성균관대학교 교수) 서화숙 (언론인)
		질의 및 종합토론	
12:30–13:30	점심 식사		
13:30–15:30	**각론 세션**	**사회** 최수일 (수학사교육포럼 대표)	
		6개국 교육과정 상세 분석 영역 통합 지도 방식	**발표** 김보현 (동성중학교 교사) **논찬** 박제남 (인하대학교 교수)
		6개국 교육과정 상세 분석 논증 기하 지도 시기	**발표** 안상진 (정책대안연구소 부소장) **논찬** 배수경 (고양호곡중학교 교사)
		6개국 교육과정 상세 분석 공학 도구 이용 방안	**발표** 한준희 (유신고등학교 교사) **논찬** 고상숙 (단국대학교 교수)
		질의 및 종합토론	
15:30–15:50	휴식		
15:50–17:00	**각론 세션**	**6개국 교육과정 상세 분석** 학교 수학과 평가 개선 방안	**발표** 박문환 (인천인제고등학교 교사) **논찬** 김두정 (충남대학교 교수) 조현공 (한성과학고등학교 교사) 김진우 (좋은교사운동 대표)
		질의 및 종합토론	
17:00–18:00		종합 정리	

목 차

6개국 수학 교육과정 국제 비교 컨퍼런스

감사의 말씀

온 나라가 수학 때문에 몸살을 앓고 있습니다. 아이들은 수포자(수학포기자)로 절망하고, 부모들은 수학 사교육비로 신음하고 있습니다. 수포자가 양산되는 지금의 상황을 이대로 방치하면서 국가 경쟁력을 운운하는 것은 어불성설입니다. 모든 아이들이 수학을 즐겁고 재미있게 배울 수 있는 환경 조성이 시급한 때입니다.

수포자 문제가 중요 교육 쟁점으로 부각된 지금, 수학의 적정한 분량에 대한 논쟁은 비켜갈 수 없는 핵심 사항입니다. 이 문제를 해결하는 데 있어서 국제 비교만큼 요긴한 참고 자료도 없을 것입니다. 사교육걱정없는세상은 2013년 이런 문제의식을 갖고 전 세계 6개국(미국, 영국, 일본, 싱가포르, 핀란드, 독일)의 교포들과 후원자들을 통해 해당 국가의 교과서를 입수했습니다. 그리고 그 교과서들을 33명의 분석 팀을 통해 지난 2년 간 비교 분석하여 이제야 그 결과를 내놓게 된 것입니다. 이 역사적인 발표 행사에 교육계 오피니언 그룹과 수학계, 언론 관계자들과 시민 100인을 모시고 그 결과를 설명 드리게 되어 무한한 영광입니다.

이번 분석 연구를 2년 동안 이끌어 주신 최수일 수학사교육포럼 대표와 33명의 분석팀 선생님들 한 분 한 분께 감사드립니다. 이 분들의 수고와 헌신이 없었다면 오늘 이 자리는 없었을 것입니다. 발제와 논찬으로 참여해주신 분들, 바쁘신 가운데 참석해 주신 모든 분들께 깊은 감사를 드립니다.

사교육걱정없는세상은 오늘 컨퍼런스를 계기로 우리 아이들을 수포자로 만드는 현재의 수능, 대학별 고사, 학교 교육과정 등을 해결하기 위한 운동(명칭: ‘수포자 없는 입시 플랜’)에 전력을 다할 것을 약속드립니다. 감사합니다.

2015년 5월

사교육걱정없는세상 공동대표 송인수 윤지희 올림

축 사

안녕하십니까? 황우여입니다.

교육과정 개정에 많은 관심을 갖고, 「수학 교과서 6개국 국제비교 컨퍼런스」를 마련해 주신 박홍근 의원님을 비롯하여 '사교육걱정없는세상' 관계자 여러분께 감사드립니다.

교육과정은 우리 교육이 지향하고, 가르쳐야 할 내용을 체계적으로 구성하고 있는 교육 설계도 역할을 합니다. 이런 의미에서 교육과정을 살피는 일에서부터 교육개혁이 시작한다고 할 수 있습니다. 글로벌 인재로 성장할 우리 학생들이 미래에 필요한 핵심역량이 무엇인지 정확히 내다보고, 학생들이 이를 즐겁게 배울 수 있도록 편성하는 것이 교육 종사자들의 궁극적인 사명과 역할이 아닐까 생각합니다.
교육부는 2015 개정 교육과정을 통해 모든 학생들이 배우는 즐거움을 느낄 수 있도록 교수·학습의 내용과 방법, 그리고 평가에 이르기까지 전반에 걸쳐 변화를 추구하고 있습니다. 학생들이 교과에 대한 학업 흥미도와 행복감을 높일 수 있도록 적정 수준의 학습량을 제시하고, 학생이 중심이 되어 활동과 탐구 중심으로 수업이 이루어질 수 있도록 교육과정 개정에 모든 노력을 기울이고 있습니다.

특히, 수학은 창조경제의 핵심이 되고, 첨단 과학기술을 선도하고 있는 중요한 학문임에도 불구하고 우리 학생들이 가장 어렵다고 호소하고 있습니다. 미래 사회의 유망 직업에서 수학 관련 직업이 꾸준히 상위권을 차지하고 있는데도 수학에 대한 어려움으로 수학을 피해 다른 직업을 꿈꿔야 한다면 그것보다 가슴 아픈 일은 없을 것입니다.

이러한 의미에서 오늘 열린 수학교과서의 국제 비교는 수학교육의 혁신 방향을

제시하는 중요한 시간이 될 것으로 기대합니다. 특히, ‘사교육걱정없는세상’에서 2013년부터 2년 동안 세계 6개국의 교과서를 분석하여 발표하신다고 하니 그 연구 과정에 있었을 어려움과 함께 성과와 의의를 공감하지 않을 수 없습니다.

오늘 이 자리가 행복교육을 실현하는 수학교육이 될 수 있도록 ‘생각하는 힘을 키우는 수학’, ‘쉽게 이해하고 재미있게 배우는 수학’, ‘더불어 함께하는 수학’에 대한 국민적 관심을 모으고, 2015 교육과정 개정에 발전적 제안을 나누시는 소중한 밑거름이 되기를 바랍니다.

끝으로 이번 연구에 참여하신 40여명 선생님들과 외국 교과서 확보에 많은 도움을 주신 해외 교포 분들의 노고에 진심으로 감사드립니다.

부총리 겸 교육부장관

황우여

축 사

‘수학 교육과정 국제 비교 컨퍼런스’에 참석해주신 여러분 안녕하십니까!
국회 교육문화체육관광위원회 소속 새정치민주연합 박홍근 의원입니다.

먼저 오늘 컨퍼런스를 주관하신 사교육걱정없는세상 관계자 여러분께 감사의 인사를 드립니다.

사교육걱정없는세상은 우리 교육의 문제점을 앞장서서 제기하고, 현실적 대안을 제시하는 교육시민단체입니다. 풍부한 역량과 열정을 겸비한 사교육걱정없는세상이 지난 2년 동안 40명의 연구자들과 함께 국내 최초로 미국 · 영국 · 일본 · 싱가포르 · 핀란드 · 독일 등 6개국의 수학 교과서를 분석해서 그 결과를 발표합니다. 우리 교육의 고질적 문제점 중 하나로 지적되고 있는 수학 학습부담 경감을 위해 다른 선진국들은 어떤지 그 실제를 살펴보기 위해서입니다. 의미 있는 연구인만큼 국회 교육 분과 상임위원으로서 거는 기대가 큽니다.

정부와 언론은 우리나라 아이들이 PISA와 같은 세계적인 경시대회에 나가서 우수한 성적을 거두고 있는 것을 자랑스럽게 이야기합니다. 그러나 실제 교실에서 만나는 평범한 아이들에게 수학은 재미없고 어렵기만한 과목입니다. 실제로 절반 정도의 아이들이 수학을 포기하는 학생을 뜻하는 ‘수포자’인 것으로 나타나고 있습니다. 상당수의 아이들에게 수학은 마음 같아서는 포기하고 싶지만 입시에서 차지하는 비중이 절대적이기 때문에 어쩔 수 없이 공부하는 과목으로 여겨지고 있습니다. 창의력과 논리적 사고를 배양해야 할 수학교육이 인생에 아무런 도움도 되지 못할 거라는 부정적 인식만을 아이들에게 심어주고 있는 것은 아닌지 의문입니다.

이제 우리 아이들의 과중한 수학학습 부담을 덜어서 현실적으로 수용 가능한 범위로 줄이는 것이 필요합니다. 물론 여기에는 이견이 제시되고 있습니다. 그리고 줄인다고 하면 과연 얼마만큼 줄일 것이고, 또 어떤 내용을 드러내야 할지에 대해서도 합의가 필요합니다. 그런 점에서 오늘 컨퍼런스에서 논의되는 선진 6개국의 사례는 좋은 참조 사례가 될 것입니다.

수학학습 부담을 덜어주는 것은 궁극적으로 절반의 아이들을 버리고 가는 지금의 교실 풍토를 모두가 함께 공부하는 교실로 만드는 길이기도 합니다. 우리 수학 교육이 더 이상 이대로는 안 된다는 인식에서 출발하는 컨퍼런스인 만큼, 수학 교육이 본래의 목적을 찾을 수 있는 중요한 계기가 되기를 바랍니다.

고맙습니다.

국회의원 박홍근

6개국 수학 교육과정 종합 비교 분석 및 한국 수학교육에 대한 제언

제목 차례

표 차례

그림 차례

Ⅰ. 개요

현재 우리나라 학생들의 수학으로 인한 고통은 극에 달했습니다. 2013년 7월에 사교육걱정없는세상(이하 "사교육걱정")에서 시민들을 대상으로 시행한 '수학 교과에 대한 국민 의식'에 대한 설문조사 결과에 의하면 응답자 1,009명의 99%가 학생들이 수학으로 인하여 고통을 받고 있다고 답했습니다.
이에 사교육걱정에서는 수학 고통의 원인을 규명하기 위해 전국수학교사모임, 좋은교사운동 등에서 활동하는 현직 교사 30여명과 함께 최근 1년 반 동안 전 세계에서 6개국을 선정하여 수학과 교육과정과 교과서를 비교 분석하였고, 오늘 그 결과를 발표하고자 합니다.

1. 대상 국가(6개국 7개 지역)와 학교급

대상 국가는 여러 가지 여건을 고려하여 미국, 일본, 싱가포르, 영국, 독일, 핀란드를 선정하였으며, 미국은 주별로 차이가 있을 것으로 생각하여 두 군데(캘리포니아 주와 뉴욕 주)를 선정하였습니다.

각국의 교육과정을 일대일로 비교 가능한 것은 중학교까지라고 판단했습니다. 고등학교는 대학 진학을 위한 고등학교와 사회 진출을 위한 고등학교로 대략 나뉘고, 대학으로 진학하는 경우에도 흔히 말하는 문과와 이과, 예술계 등 다양한 전공 분야가 있고, 대입시도 표준화시험을 비롯하여 내신과 대학별고사에 이르기까지 복잡다단한 구조를 가지고 있기 때문에 이 모든 상황을 고려한 비교 잣대를 만드는 것이 어려웠습니다.
그래서 비교적 모든 학생들이 비슷한 교육을 받는 중학교까지의 수학 교육과정을 비교 분석하는 것으로 초점을 맞추었고, 고등학교 교육과정은 우리나라 교육과정 운영에 필요한 부분만 정리하였습니다.

임재훈, 이대현(2004)에 의하면, 제7차 교육과정이긴 하지만 우리나라 수학과 교육과정에 제시된 교육 내용의 양은 다소 많은 것으로 판단되었습니다. 그리고 이것은 이번의 조사에서도 충분히 뒷받침되고 있습니다.
박경미(2014)에 의하면, OECD 국가 중 우리나라 초등학교와 중학교의 수학 시수는 국제평균에 미달입니다. 초등학교의 경우 전체 시수에서 수학 시수가 차지하는 비율이 우리나라는 14%인데 이는 국제 평균인 17%에 3% 포인트 못 미치는 것이며, 중학교의 경우 우리나라는

11%인데 이는 국제 평균 13%에 2% 포인트가 모자라는 것입니다.
두 자료를 종합하면 우리나라는 가르치는 시간은 국제적인 표준에 미치지 못하면서 가르치는 내용은 다소 많은 편에 속하기 때문에 빨리 가르치는 것이 유행하고 있으며, 속도를 요하는 수업에서 나타나는 전형적인 교수법인 일방 강의식 · 주입식 교육이 주를 이루고 있습니다. 교과서도 그런 수업에 적합하게 구성되어 있습니다.

2. 비교 분석의 목표

국제비교 분석의 목표는 다음과 같습니다.
(1) 우리나라 수학과 교육과정의 내용 적정화를 위한 시사점 도출(양적 비교)
(2) 우리나라 수학에서의 평가(내신 및 수능 등) 방식의 적정화를 위한 시사점 도출
(3) 각 나라별 수학교과서 내용 체계를 파악하여 우리나라 수학교과서 내용 조직에 관한 시사점 도출
(4) 다른 나라 수학과 교육과정에 대한 최근 동향 분석을 통한 향후 우리나라 수학교육과정 개정 방향에 대한 의견 제시
(5) 교과서에서 다루어야 할 과제에 대한 시사점 도출

3. 비교 분석 연구진과 자료

연구는 2013년 11월부터 시작되었으며, 지금까지 계속되고 있습니다. 〈표 Ⅰ-1〉과 같이 분석팀은 초등과 중등으로 나누어 구성하였으며, 초등팀은 전국수학교사모임과 좋은교사운동에 소속된 회원 중 자원으로 10명의 교사가 참여하였으며, 중등팀은 전국수학교사모임에 소속된 회원 중 자원하여 12명의 교사가 참여하였고, 이것을 전국수학교사모임 교육과정연구팀과 사교육걱정없는세상 연구진 11명이 총괄하여 정리하였습니다.

〈표 Ⅰ-1〉 비교 분석 연구진 명단

팀구성	인원(명)	이름(학교)
초등팀	10	강태석(서울 은정초), 김남준(서울 불암초), 박순성(광주 학강초), 이정(서울 대광초), 임지애(서울 숭곡초), 정연숙(서울 하늘초),정현진(평택 진위초), 조인선(서울 문래초), 최현정(경기 광릉초), 한효진(인천 열음학교)
중등팀	12	김가혜(경기과학고), 김영혜(서울 경복고), 김은상(서울 세종고), 김정은(경기 조원고), 노석태(부천 계남고), 배수나(서울 서초고), 유복종(부천 계남고), 윤민지(성남여고), 이미류(서울 삼각산고), 이현미(경기 광문고), 정종식(서울 중대부중), 최유미(서울 서초고)
총괄팀	11	김보현(서울 동성중), 김정연(사교육걱정없는세상), 김형신(서울 신창중), 나현주(사교육걱정없는세상), 박문환(인천 인제고), 박민숙(사교육걱정없는세상), 안상진(사교육걱정없는세상), 이경은(서울사대부중), 정현진(평택 진위초), 최수일(사교육걱정없는세상), 한준희(경기 수원고)
합계	33	

각 나라별로는 초등과 중등 각 2명씩 3~4명의 교사가 분담하여 교육과정과 교과서를 분석했습니다. 분담을 맡은 교사들은 각국의 교과서의 내용 자체를 정밀 분석한 후 우리나라 교육과정에 대비시키는 방법으로 작업을 진행했습니다. 2013년 11월에 시작된 분석 작업은 겨울방학인 2월을 넘겨 3, 4월 정도에 초등팀과 중등팀의 분석 작업이 완료되었으며, 이후에는 1년 여 동안 총괄팀에서 정리를 진행하여 오늘에 이르게 되었습니다.

우리는 각국의 최신의 교육과정과 교과서를 이용해 분석을 하였습니다. 우리가 분석한 교육과정 문서와 교과서는 각각 다음 〈표 Ⅰ-2〉, 〈표 Ⅰ-3〉과 같습니다. 분석 교사 중에는 해외 유학 또는 해외 파견 근무 등으로 최근에 연고가 있는 미국과 영국, 일본을 우선으로 대상 국가를 배정했는데, 남은 3개국 싱가포르, 독일, 핀란드는 연고가 없었습니다.

〈표 Ⅰ-2〉 본 연구에서 분석한 각국의 교육과정 문서

국가명	개정 시기	교육과정
우리나라	2011년	2009 개정 수학과 교육과정
미국	2010년	Common Core State Standards for Mathematics
일본	2009년	新學習指導要領
싱가포르	2006년	Syllabuses
영국	2014년	https://www.gov.uk/government/publications/national-curriculum-in-england-mathematics-programmes-of-study

독일	2004년	http://www.isb-gym8-lehrplan.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/index.php?StoryID=26192&subtemplate=print&supertemplate=
핀란드	2003년	National core curriculum for upper secondary schools 2003

〈표 Ⅰ-3〉 본 연구에서 분석한 각국의 교과서

국가명		출판년도	교과서
우리나라	초	2013년	2009 개정 교육과정 교과서
	중	2013년	2009 개정 교육과정 교과서
	고	2014년	2009 개정 교육과정 교과서
미국CA	초	2009년	enVisionMath Interactive Homework Workbook Grade 1-6(Pearson Education)
	중	2001년	California Middle School, Mathematics Concepts and Skill Course 1-2(Larson Bo-swell Kanold Stiff)
	고	2008년	Math, Algebra, Geometry(McDougal Littell)
미국NY	초	2013년	Go Math!(Houghton Mifflin Harcourt)
	중	2014년	Connected Mathematics(6-8학년, Pearson Prentice Hall)
	고	2012년	Algebra 1, 2, Geometry(HOLT McDOUGAL)
일본	초	2009년	新しい數學(동경서적)
	중	2009년	新しい數學(동경서적)
	고	2009년	고등학교 수학교과서(동경서적)
싱가포르	초	2012년	New Syllabus Primary Mathematics(Shinglee)
	중	2012년	New Syllabus Mathematics(Shinglee)
	고	2000년	Core Math 등(Nelson Thornes)
영국	초	2013년	Math Made Easy Grade 1-5 Math Workbook(DK)
	중	2008년	New Maths Frameworking Year 7-9, Pupil Book 1-3(Collins)
	고	2012년	A-Level Mathematics Core 1-3(CGP)
독일	초	2011년	Mein drachenstarkes Grundschulbuch(Klett)
	중	2010년	Lambacher Schweizer(Klett)
	고	2010년	Lambacher Schweizer(Klett)
핀란드	초	2011년	핀란드 초등 수학교과서(Laskutaito) 1-6학년. 번역본
	중	2014년	핀란드 중학교 수학교과서(Laskutaito) 7-9학년. 번역본
	고	2007년	핀란드 고등학교 수학교과서 1-14권. WSOY판

4. 연구의 문제점과 한계, 그리고 제언

이 연구는 우리나라가 아닌 국제적인 연구이기 때문에 여러 가지 어려움이 있었습니다. 이것은 이 연구가 가진 한계라고 볼 수 있습니다. 그동안 겪은 문제점을 정리하면 다음과 같습니다.

(1) 조사 대상 국가에 대한 언어 소통 가능한 전문 인력 부족으로 인한 면밀한 분석의 한계 노출 (예를 들면, 핀란드 교과서는 우선 영문으로 번역한 후에 비로소 그것을 한글로 번역할 수 있었음)
(2) 각국의 현황, 사회적 배경에 대한 정확한 정보가 부족
(3) 최신 교육과정과 교과서에 대한 정보가 거의 없음(평가원이 운영하는 국가교육과정 사이트에도 최신 자료가 부족함).
(4) 현지 유학 경험자 또는 한국에 있는 각 나라 문화원으로부터 얻을 수 있는 정보도 극히 제한적임.
(5) 각 나라별로 상황이 특수하여 일괄적으로 비교하는데 따르는 한계 존재
(6) 고등학교 수학 선택과목은 각국의 대입시, 대학 선이수 여부, 각 과목의 선택 비율 등을 조사해야 분석의 의미가 있지만 불가능했음.
(8) 수학 교과서와 수업의 관계, 즉 수업에서 수학 교과서를 활용하는 실태 파악이 안 됨.
(9) 교과서는 최대한 대표성 있는 것을 현지의 한국인이나 현지 유경험자를 통해 선정했지만, 특정 교과서를 분석한 것이므로 일반화하기에 무리가 있을 수 있음.

민간 시민 단체가 이런 국제비교를 시도한 것은 최근 교육부 등 행정부나 국가 기관에서 이런 연구를 게을리 한 탓입니다. 전문 연구자들이 아닌 현직 교사들의 이런 연구가 다소 허점이 있을 수 있음을 감안하더라도 이 연구는 우리나라의 수학 교육과정 연구와 수학교육의 많은 문제를 개선하는 데 있어서 도화선이 될 것이라 생각합니다. 다른 나라의 교육과정에 대한 잘못된 판단이 있을 수 있지만, 그것이 이 연구의 중요성을 훼손하지는 않을 것입니다. 이 연구를 계기로 교육부를 비롯한 국가 기관(한국교육과정평가원, 한국과학창의재단)이 예산과 인력을 투입하여 보다 체계적으로 국제적인 수학교육 동향을 면밀히 조사, 연구하는 활동을 지속할 것을 기대합니다.

Ⅱ. 교육과정 국제비교 결과

이 교육과정 국제비교의 목적은 우리나라 수학과 교육과정의 양의 적절성을 점검하고자 하는 것입니다. 그래서 우리나라와 세계 6개국의 수학과 교육과정의 내용을 비교할 때 중점을 둔 것은 가르치는 시기입니다. 우리나라는 가르치는데 해당 나라는 가르치는 내용이 없다든가 혹은 우리나라는 가르치지 않는데 해당 나라는 포함하고 있는 경우 등도 면밀히 검토하고자 하였습니다.

1. 초등학교 내용 비교 및 분석

가. 초등학교 내용 비교표

〈표 Ⅱ-1〉 초등학교 내용 비교표

학년	영역	우리나라	미국	일본	싱가포르	영국	독일	핀란드
1학년	수와 연산	100까지의 수	k-1	1	1	1,2	2	1
		받아올림과 받아내림이 없는 두 자리 수의 덧셈과 뺄셈	k-1	1	1	1	2	1
	도형	입체도형의 모양	k-1	1	1,2	1	2,3	2
		평면도형의 모양	1	1	1	1	1	2
	측정	양의 비교(길이, 들이, 무게, 넓이)	k-1	1	1-3	1	1	2
		시각 읽기(몇 시, 몇시 30분)	1	1	1	1	1	3
	규칙성	여러 가지 물체, 무늬, 수의 배열에서 규칙 찾기		1	1	2	1	1
2학년	수와 연산	네 자리 이하의 수	1-2	2	2	2-4	3	2
		받아올림과 받아내림이 있는 두 자리 수의 덧셈과 뺄셈	2	2	1	2	2	2
		곱셈구구	2	2,3	2,3	2-4	2	2
	도형	평면도형과 그 구성 요소	2	1,2	1	2	2	2
	측정	시각과 시간(몇 시 몇 분)	2	1,3	2,3	2	2,3	3
		길이재기	1-2	2	2,3	2	2	2

학년	영역	우리나라	미국	일본	싱가포르	영국	독일	핀란드
2학년	규칙성	수 배열표와 쌓기나무에서 규칙 찾기		1	2	2	2	
	확률과 통계	분류하기	1	1,2	2		2	
		표 만들기	1	3	1,2	2		2
		그래프 그리기	2		1,2	2		2
3학년	수와 연산	세 자리 수의 덧셈과 뺄셈	2	3	2	3–5	3	3
		곱셈 (올림이 있는 (###)×(#), (##)×(##))	3	3	2–4	3,4	2–4	3
		나머지가 있는 나눗셈	3	3	3	5	3	3
		분수의 종류와 크기 비교	3,4	3	2–4	3,5,7	6	3
		소수의 종류와 크기 비교	4,5	3	4	4	6	3
	도형	도형의 기초(선분, 직선, 각, 직각, 직각삼각형, 직사각형, 정사각형)	4	2,4	1,3,5	3	3,5	2,4
		평면도형의 이동(밀기, 뒤집기, 돌리기)					3	2
		원의 구성 요소(중심, 반지름, 지름)	3	3	6	6	5	4
	측정	시간의 덧셈, 뺄셈(초 단위까지)	3		4	3		4
		길이의 덧셈과 뺄셈(mm, km)	3	2,3	2,3	3,4	3	3
		들이와 무게	3	2,3	2,3	3	3,4	2
	규칙성	규칙을 찾아 설명하고 수로 나타내기		3	3	3	3	3
	확률과 통계	자료 정리하기		3	1,2	3		3
		그림그래프	2	3	1,2	3		3
4학년	수와 연산	큰 수(다섯 자리 이상의 수)		3,4	4,5	5,6	4	4
		곱셈((###)×(##), (####)×(##))		4	4,5	6	4	4
		나눗셈(두 자리 수로 나누기)	3	4	5	6	4	4
		분수의 덧셈과 뺄셈(동분모)		3	2,4	3,4	6	4
		소수의 덧셈과 뺄셈	5	4	4	5,7	3,6	3–5
		자연수의 혼합 계산			5	5	5	4
	도형	여러 가지 삼각형	4	3	5	4	5	4,5
		여러 가지 사각형	4	2,5	4,5	4	5	4
		다각형	5	5	7	4,5	5	6

학년	영역	우리나라	미국	일본	싱가포르	영국	독일	핀란드
	측정	삼각형과 사각형의 내각의 크기의 합		5	5	5	5	5
		어림하기(반올림, 올림, 버림)	3	4	4	4	5	3
		수의 범위(이상, 이하, 초과, 미만)		6	4	4		
	규칙성	규칙 찾고 계산 결과 추측하기		6	4	4,7	4	4
	확률과 통계	막대그래프	1	6	3	7		4
		꺾은선그래프	3	4	4	7		4
5학년	수와 연산	약수와 배수	4	5	4,7	5,6,8	5,6	5
		약분과 통분		5	3,4	5	6	6,7
		분수와 덧셈과 뺄셈(이분모)	5	5	3,4	6,8,9	6	6
		분수의 곱셈과 나눗셈	5–7	5	4,5	6,8,9	6	6
		소수의 곱셈과 나눗셈(자연수로 나누기)		4,5	4,5	8	6	6
	도형	도형의 합동	8	5	8	5,8	7	5
		선대칭도형과 점대칭도형	4	6	4	4,7	3,4,7	5
		직육면체와 정육면체		4	5,6	5,6	5	6,9
	측정	평면도형의 둘레와 넓이	3,6	4,5	3–5	4,5,8	5	5,7
		무게와 넓이의 여러 가지 단위	4–5	3,4,6		5,8	3–5	5,7,9
	확률과 통계	가능성과 평균	6,7		5	6		5
		그림그래프	2	5	5	5	5	5
6학년	수와 연산	분수와 소수(분수로 나누기)	6	5	5,6	5,6	6	6
	도형	각기둥과 각뿔		5,6	6	10	5	6,9
		원기둥과 원뿔		5,6	6	10	5	6
		쌓기나무와 공간감각	6			8	4	3
	측정	원주율과 원의 넓이	7	5,6	6	8,9	5,8	8
		직육면체, 정육면체의 겉넓이와 부피	6	5	5	5–7	6	6,9
	규칙성	비와 비율	6	5	5–7	5,8,9	6,8	6,8,9
		비례식과 비례배분		6	5–7	8	8	
		정비례와 반비례		6	8	8	8	5,9
	확률과 통계	비율그래프(띠그래프, 원그래프)		5,6	6	6,8	7	6

* 〈표 Ⅱ-1〉에 나온 숫자는 학년을 표시한 것입니다.
* 음영 부분은 다른 나라가 우리나라보다 늦거나 또는 늦게까지 배우는 것들을 표시한 것입니다.
* 이 표가 우리나라 교육과정을 기준으로 조사했기 때문에 우리나라가 여러 학년에 걸쳐서 배우는 것이 드러나지 않는다는 점이 문제점으로 발생했습니다. 그 부분은 표에는 나타나지 않지만 세부적인 항목을 체크할 때는 이런 사항을 감안했습니다. 예를 들면 우리나라 5학년의 도형의 합동은 7학년의 삼각형의 합동 조건과 연결되는 주제라서 독일의 경우 7학년에 도형의 합동을 배우는 것을 우리나라와 같이 배우는 것으로 처리했습니다.

나. 초등학교 교육과정 비교 · 분석

초등학교 교육과정의 내용을 교육과정 문서의 내용과 교과서 단원 구성을 기준으로 하여 이름을 구체적으로 정하였습니다. 우리나라 초등학교 수학과 교육과정은 형식상 학년군제를 따르고 있습니다. 그래서 교육과정 문서는 매 학년군의 최종 학년(1~2학년군은 2학년, 3~4학년군은 4학년, 5~6학년군은 6학년)에서 무엇을 성취할 것인가를 명시하고 있습니다. 그래서 교육과정 문서만으로 다른 나라와 학년별 내용을 비교하는 것이 어려워서 교과서를 참고했습니다.
비교할 항목 이름과 내용은 우리나라 교과서의 내용을 참고로 하여 가급적 구체적으로 정했습니다. 그래야 정확한 비교가 될 것이기 때문입니다. 예를 들면, 초등학교 1~2학년군의 '두 자리 수의 덧셈과 뺄셈' 단원은 2학년까지 두 자리 수의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있는 것이 최종 성취 기준입니다. 그런데 교과서는 1학년이나 2학년 모두 '덧셈과 뺄셈'이라고만 되어 있어서 덧셈과 뺄셈의 규모나 범위가 나타나지 않습니다. 이렇게 되면 다른 나라와 비교하는 것이 어렵습니다. 그래서 우리나라 교과서의 내용을 보고 1학년은 '받아올림과 받아내림이 없는 두 자리 수의 덧셈과 뺄셈'으로, 2학년은 '받아올림과 받아내림이 있는 두 자리 수의 덧셈과 뺄셈'으로 구체화했습니다.
우리나라의 교육과정의 가장 두드러진 특징은 한 가지 학습 주제를 단번에 가르쳐서 끝내는 것입니다. 다른 나라에서 여러 학년에 걸쳐서 반복적으로 가르치는 나선형 교육과정을 택하는 이유는 학생들이 한 번 배울 때 충분하게 이해하기 어려우며, 학생마다 차이가 있음을 배려한 것도 있지만, 인지 발달에 따라 이해하는 정도가 다른 것을 고려하여 처음에는 간단하게 도입했다가 학년이 더할수록 점점 심화된 내용으로 확장하여 지도하는 것을 볼 수 있습니다.
우리나라에서 단번에 가르치는 것을 다른 나라에서 여러 학년에 걸쳐 가르치는 경우 다른

나라에서는 그 최종 지도시기를 기준으로 비교하였습니다. 왜냐하면 그 최종 지도시기에 배우는 정도가 가장 심화된 것이고, 거기까지 가르치는 것이 우리나라의 단번에 지도하는 것에 비교되기 때문입니다.
우리나라 초등학교 과정 중 다른 나라 중학교에 해당하는 경우는 다른 나라가 늦게 배우는 것으로 분류했지만, 다른 나라 고등학교에 해당하는 경우는 배우지 않는 것으로 분류했습니다. 왜냐하면 중학교까지는 모든 학생이 거의 똑같이 배운다고 전제를 하고 이 연구를 했기 때문에 늦지만 배운다는 것은 확실하다고 볼 수 있기 때문입니다. 하지만 고등학교의 경우 진로에 따라 과정에 따라 배우지 않을 수도 있기 때문에 중학교까지는 배우지 않는다는 것으로 분류하는 것이 타당하다고 판단했습니다.
이런 원칙으로 내용 비교를 한 결과는 다음 〈표 Ⅱ-2〉와 같습니다.

〈표 II-2〉 6개국의 초등학교 지도 항목 비교 · 분석표(총 68개 항목)

구분	미국	일본	싱가포르	영국	독일	핀란드	평균
우리나라가 빨리 배우는 항목 수(A)	10	12	25	38	30	24	23.2
우리나라가 늦게 배우는 항목 수(B)	10	7	10	0	3	4	5.7
우리나라에만 있는 항목 수(C)	14	7	3	3	10	3	6.7
해당 나라에만 있는 항목 수(D)	14	2	4	6	7	2	5.8
우리나라와 다른 나라의 차이 (A+C)-(B+D)	0	10	14	35	30	21	18.3
우리나라가 많은 비율(%)	0.0	14.7	20.6	51.5	44.1	30.9	26.9

전반적으로 우리나라 초등학교 수학은 유럽 국가들에 비해 배우는 시기가 빠르며 양도 많은 것으로 나타났습니다. 초등학교 수학 항목 68개에서 6개국 평균 18.3개(26.9%)가 우리나라가 가르치는 시기가 빠르거나 우리나라만 가르치는 것입니다. 미국과만 큰 차이를 보이지 않습니다.

1) 우리나라와 미국의 교육과정 비교

미국은 초등학교는 유치원(K)부터 시작하여 5학년까지(K~5)이며, 중학교는 6~8학년입니다. 그러나 이 연구에서는 같은 숫자를 같은 학년으로 치고 분석을 했습니다. 즉, 미국의 1학년과 우리나라의 1학년을 비교하여 분석했습니다.
우리나라가 미국보다 빨리 배우는 것은 수와 연산 영역에서 분수의 종류와 크기 비교, 소수

의 종류와 크기 비교, 소수의 덧셈과 뺄셈, 분수의 곱셈과 나눗셈 등 4가지, 도형 영역에서 도형의 기초, 다각형, 도형의 합동 등 3가지, 측정 영역에서 평면도형의 둘레와 넓이, 원주율과 원의 넓이 등 2가지, 확률과 통계 영역에서 평균 등 1가지로 총 10가지입니다.
반면 미국이 우리나라보다 빨리 배우는 것은 수와 연산 영역에서 세 자리 수의 덧셈과 뺄셈, 두 자리 수로 나누는 나눗셈, 약수와 배수 등 3가지, 도형 영역에서 선대칭도형과 점대칭도형 등 1가지, 측정 영역에서 어림하기 등 1가지, 확률과 통계 영역에서 분류하기, 표 만들기, 막대그래프, 꺾은선그래프, 그림그래프 등 5가지로 총 10가지입니다.
우리나라 초등학교에서는 배우지만 미국에서는 배우지 않는 것은 수와 연산 영역에서 큰 수(다섯 자리 이상), 곱셈((###)×(##), (####)×(##)), 자연수의 혼합 계산, 약분과 통분 등 4가지, 도형 영역에서 평면도형의 이동 등 1가지, 측정 영역에서 수의 범위(이상, 이하, 초과, 미만) 등 1가지, 규칙성 영역에서 여러 가지 물체에서 규칙 찾기, 수 배열표에서 규칙 찾기, 규칙을 찾아 설명하고 수로 나타내기, 비례식과 비례배분, 정비례와 반비례 등 5가지, 확률과 통계 영역에서 자료 정리하기, 가능성, 비율그래프 등 3가지로 총 14가지입니다.
우리나라 초등학교에서는 배우지 않지만 미국에서는 배우는 것은 수와 연산 영역에서 유리수 체계의 이해, 지수를 사용한 식, 문자를 사용한 식, 일차방정식과 일차부등식 등 6가지, 도형 영역에서 사각형의 포함 관계, 좌표평면 등 2가지, 확률과 통계 영역에서 여러 가지 그림(line plot, dot plot, box plot), 통계적 변이 이해하기, 수직선, 히스토그램, 대푯값, 산포도 등 6가지 등 총 14가지입니다.

2) 우리나라와 일본의 교육과정 비교

우리나라가 일본보다 빨리 배우는 것은 수와 연산 영역에서 곱셈구구 등 1가지, 도형 영역에서 도형의 기초, 여러 가지 사각형, 다각형, 선대칭도형과 점대칭도형 등 4가지, 측정 영역에서 시각과 시간(몇 시 몇 분), 삼각형과 사각형의 내각의 크기의 합, 수의 범위(이상, 이하, 초과, 미만), 무게와 넓이의 여러 가지 단위 등 4가지, 규칙성 영역에서 규칙 찾고 계산 결과 추측하기 등 1가지, 확률과 통계 영역에서 표 만들기, 막대그래프 등 2가지로 총 12가지입니다.
반면 일본이 우리나라보다 빨리 배우는 것은 수와 연산 영역에서 분수의 덧셈과 뺄셈(동분모), 분수와 소수(분수로 나누기) 등 2가지, 도형 영역에서 여러 가지 삼각형, 직육면체와 정육면체, 직육면체, 정육면체의 겉넓이와 부피 등 3가지, 규칙성 영역에서 수 배열표에서 규칙 찾기, 비와 비율 등 2가지로 총 7가지입니다.
우리나라 초등학교에서는 배우지만 일본에서는 배우지 않는 것은 수와 연산 영역에서 자연수의 혼합 계산 등 1가지, 도형 영역에서 평면도형의 이동, 쌓기나무와 공간감각 등 2가지,

측정 영역에서 시간의 덧셈, 뺄셈(초 단위까지) 등 1가지, 확률과 통계 영역에서 분류하기, 그래프 그리기, 가능성과 평균 등 3가지로 총 7가지입니다.
우리나라 초등학교에서는 배우지 않지만 일본에서는 배우는 것은 수와 연산 영역에서 주판셈, 연산법칙 등 2가지입니다.

일본의 교과서는 우리나라와 마찬가지로 개념적인 학습보다는 절차적이고 도구적인 학습을 유도하고 있습니다. 교과서에 풀이 과정을 제시하고 이를 문제를 통해 확인 하게 함으로서 교과서의 사고방식을 따라하도록 하여, 학생들의 자기 주도적 학습태도의 함양과 창의적 사고능력의 향상에는 별로 도움이 되지 않을 것을 생각됩니다. 한국이나 일본 두 나라 모두 미국 교과서에서 볼 수 있는 일반화 수준의 질문은 없고, 사고력을 요하는 문제도 개념을 학생들이 직접 구성하고 일반화하는 과정에 도움을 주기보다 이미 배운 내용을 바탕으로 개념과 정리를 활용하여 심화된 문제를 해결하는 것을 목적으로 하고 있습니다.
소단원의 구성이나 문제의 구성이 한국과 일본 모두 개념 및 원리를 학습한 다음 '~의 활용/이용'이란 소단원으로 마무리 하는 경우가 많으며, 이와 관련된 문제를 해결하는 능력을 중시하는 점은 서로 비슷합니다. 미국 및 유럽 교과서 내용과 비교해 보면 컴퓨터 및 계산기를 활용해야 풀 수 있는 실질적인 실생활 문제보다 계산기의 도움 없이 문제해결이 가능하도록 실생활의 데이터를 가공한 문제를 제시하는 문제가 많다는 점도 공통점이라 할 수 있습니다.

3) 우리나라와 싱가포르의 교육과정 비교

우리나라가 싱가포르보다 빨리 배우는 것은 수와 연산 영역에서 곱셈구구, 곱셈(올림이 있는 (###)×(#), (##)×(##)), 분수의 종류와 크기 비교, 소수의 종류와 크기 비교, 큰 수(다섯 자리 이상의 수), 곱셈((###)×(##), (####)×(##)), 나눗셈(두 자리 수로 나누기), 자연수의 혼합 계산, 약수와 배수 등 9가지, 도형 영역에서 입체도형의 모양, 도형의 기초, 원의 구성 요소, 여러 가지 삼각형, 여러 가지 사각형, 다각형, 도형의 합동, 직육면체와 정육면체 등 8가지, 측정 영역에서 양의 비교(길이, 들이, 무게, 넓이), 시각과 시간(몇 시 몇 분), 길이재기, 시간의 덧셈, 뺄셈(초 단위까지), 삼각형과 사각형의 내각의 크기의 합 등 5가지, 규칙성 영역에서 비와 비율, 비례식과 비례배분, 정비례와 반비례 등 3가지로 총 25가지입니다.
반면 싱가포르가 우리보다 빨리 배우는 것은 수와 연산 영역에서 받아올림과 받아내림이 있는 두 자리 수의 덧셈과 뺄셈, 세 자리 수의 덧셈과 뺄셈, 약분과 통분, 분수와 덧셈과 뺄셈(이분모) 등 4가지, 도형 영역에서 평면도형과 그 구성 요소, 선대칭도형과 점대칭도형, 직육면체, 정육면체의 겉넓이와 부피 등 3가지, 확률과 통계 영역에서 자료 정리하기, 그림그

래프, 막대그래프 등 3가지로 총 10가지입니다.
우리나라 초등학교에서는 배우지만 싱가포르에서는 배우지 않는 것은 도형 영역에서 평면도형의 이동, 쌓기나무와 공간감각 등 2가지, 측정 영역에서 무게와 넓이의 여러 가지 단위 등 1가지로 총 3가지입니다.
우리나라 초등학교에서는 배우지만 싱가포르에서는 배우지 않는 것은 도형 영역에서 평면도형의 이동, 쌓기나무와 공간감각 등 2가지, 측정 영역에서 무게와 넓이의 여러 가지 단위 등 1가지로 총 3가지입니다.
우리나라 초등학교에서는 배우지 않지만 싱가포르에서는 배우는 것은 수와 연산 영역에서 화폐관련 문제해결하기, 한 변수의 대수적 표현, 속력 등 3가지, 도형 영역에서 다양한 겨냥도 등 1가지로 총 4가지입니다.

싱가포르에서는 5학년부터 복잡한 계산은 계산기를 이용하며 그 결과를 근삿값으로 표현하는 경우가 대부분입니다. 5학년부터는 특별한 언급이 없는 한 계산기를 사용합니다. 또한, 우리나라와 비교해서 볼 때, 각 영역별로 공히 각 주제를 여러 학년에 걸쳐 반복적이고 점진적으로 완성하는 경향을 볼 수 있습니다.

4) 우리나라와 영국의 교육과정 비교

우리나라가 영국보다 빨리 배우는 것은 수와 연산 영역에서 100까지의 수, 네 자리 이하의 수, 곱셈구구, 세 자리 수의 덧셈과 뺄셈, 곱셈(올림이 있는 (###)×(#), (##)×(##)), 나머지가 있는 나눗셈, 분수의 종류와 크기 비교, 소수의 종류와 크기 비교, 큰 수(다섯 자리 이상의 수), 곱셈((###)×(##), (####)×(##)), 나눗셈(두 자리 수로 나누기), 소수의 덧셈과 뺄셈, 자연수의 혼합 계산, 약수와 배수, 분수와 덧셈과 뺄셈(이분모), 분수의 곱셈과 나눗셈, 소수의 곱셈과 나눗셈(자연수로 나누기) 등 17가지, 도형 영역에서 원의 구성 요소, 다각형, 도형의 합동, 선대칭도형과 점대칭도형, 직육면체와 정육면체, 쌓기나무와 공간감각 등 6가지, 측정 영역에서 길이의 덧셈과 뺄셈(mm, km), 삼각형과 사각형의 내각의 크기의 합, 평면도형의 둘레와 넓이, 무게와 넓이의 여러 가지 단위, 원주율과 원의 넓이, 직육면체, 정육면체의 겉넓이와 부피 등 6가지, 규칙성 영역에서 여러 가지 물체에서 규칙 찾기, 규칙 찾고 계산 결과 추측하기, 비와 비율, 비례식과 비례배분, 정비례와 반비례 등 5가지, 확률과 통계 영역에서 막대그래프, 꺾은선그래프, 가능성과 평균, 비율그래프 등 4가지로 총 38가지입니다.
반면 영국이 우리나라보다 빨리 배우는 것은 단 1개도 없습니다.
우리나라 초등학교에서는 배우지만 영국에서는 배우지 않는 것은 도형 영역에서 평면도형의 이동, 각기둥과 각뿔, 원기둥과 원뿔 등 3개입니다.

우리나라 초등학교에서는 배우지 않지만 영국에서는 배우는 것은 수와 연산 영역에서 소인수분해, 양의 정수와 음의 정수 등 2가지, 도형 영역에서 좌표평면 등 1가지, 측정 영역에서 등주 문제 등 1가지, 규칙성 영역에서 문자의 사용, 방정식 등 2가지로 총 6가지입니다.

영국 국가교육과정의 가장 큰 특징 중 하나는 국가에서 제작하는 국정교과서나 국가의 인증을 받은 검정교과서가 없다는 것입니다. 즉, 국가 교육과정은 학교 교육과정의 기본 틀만을 제시하고, 학교 단위에서는 지역과 개별 학교의 특성을 반영하여 자유롭게 교육과정을 개발하여 운영하고 있습니다.

영국 수학과 교육과정에서는 학생들이 효율적으로 필산과 더불어 암산을 발전시킬 수 있어야함을 강조하고 있습니다. 이런 강조는 연산 교육 전반에 걸쳐서 매 학년마다 계속되고 있습니다.

영국에서는 초등학교 고학년부터 계산기 사용을 제한적으로 허용하고 있습니다. 계산기는 필산과 암산의 대체물로 사용되어서는 안 되며, 계산기는 쓰기와 암산 능력이 안정적일 때 학생들의 개념적인 이해와 보다 복잡한 수에 관한 문제를 탐구하는 것을 지원하기 위해 Key Stage 2의 마지막 부분에서만 허락하고 있습니다. 초등학교와 중학교에서 교사들은 ICT 도구가 필요한 시기에 관해서 항상 판단해야 할 것을 요구하고 있습니다. 예를 들면, 학생들은 역동적인 기하 ICT 도구를 사용하여, 변들 사이나 대각선과 평행한 변 사이에 만들어지는 각, 그리고 사각형의 다른 성질들 사이에 관한 추측을 만들 수 있습니다(5학년). 또한 학생들은 역동적인 기하 ICT 도구를 사용하여, 미지의 각을 관한 추론을 만들고 이것들을 미지수를 구하는 문제들에 관련시키기 위해 각의 합에 대한 성질인 다른 여러 성질들을 사용할 수 있습니다(5학년).

영국의 통계 교육에서는 다음 〈표 Ⅱ-3〉과 같이 통계적인 해석을 강조하고 있습니다.

〈표 Ⅱ-3〉 영국의 초등학교 통계 교육과정에서 통계적인 해석 강조 내용

2학년 :	간단한 그림그래프, 집계 차트, 블록 다이어그램과 표를 해석하고 만든다. 학생들은 정보를 기록하고, 해석하고, 분석하고, 비교한다.
3학년 :	그림그래프와 표를 사용하여 막대그래프를 해석하고 나타낸다. 학생들은 여러 상황에서 제시된 데이터를 해석하는 것을 계속한다.
4학년 :	막대그래프와 시간그래프를 포함하여, 적절한 그래픽 방법을 사용하여 이산 및 연속적인 데이터를 해석하고 표현한다.
5학년 :	시간표를 포함하여 표를 완성하고, 읽고, 해석하기. 학생들은 어떤 표현이 자료를 가장 적절하게 그리고 왜 그런지를 결정하기 시작한다.
6학년 :	원그래프 및 선 그래프를 해석하고 구성하기 그리고 이들을 사용하여 문제를 해결하기. 학생들은 원그래프의 해석에 각도, 분수 및 백분율에 자신의 작업을 연결한다.

5) 우리나라와 독일의 교육과정 비교

우리나라가 독일보다 빨리 배우는 것은 수와 연산 영역에서 100까지의 수, 받아올림과 받아내림이 없는 두 자리 수의 덧셈과 뺄셈, 네 자리 이하의 수, 곱셈(올림이 있는 (###)×(#), (##)×(##)), 분수의 종류와 크기 비교, 소수의 종류와 크기 비교, 분수의 덧셈과 뺄셈(동분모), 소수의 덧셈과 뺄셈, 자연수의 혼합 계산, 약수와 배수, 약분과 통분, 분수와 덧셈과 뺄셈(이분모), 분수의 곱셈과 나눗셈, 소수의 곱셈과 나눗셈(자연수로 나누기) 등 14가지, 도형 영역에서 입체도형의 모양, 도형의 기초, 원의 구성 요소, 여러 가지 삼각형, 여러 가지 사각형, 다각형, 선대칭도형과 점대칭도형 등 7가지, 측정 영역에서 시각과 시간(몇 시 몇 분), 들이와 무게, 삼각형과 사각형의 내각의 크기의 합, 어림하기, 원주율과 원의 넓이 등 5가지, 규칙성 영역에서 비와 비율, 비례식과 비례배분, 정비례와 반비례 등 3가지, 확률과 통계 영역에서 비율그래프 등 1가지로 총 30가지입니다.
반면 독일이 우리나라보다 빨리 배우는 것은 도형 영역에서 각기둥과 각뿔, 원기둥과 원뿔, 쌓기나무와 공간감각 등 3가지입니다.
우리나라 초등학교에서는 배우지만 독일에서는 배우지 않는 것은 측정 영역에서 시간의 덧셈, 뺄셈(초 단위까지), 수의 범위(이상, 이하, 초과, 미만) 등 2가지, 확률과 통계 영역에서 분류하기, 표 만들기, 그래프 그리기, 자료 정리하기, 그림그래프, 막대그래프, 꺾은선그래프, 가능성과 평균 등 8가지로 총 10가지입니다.
우리나라 초등학교에서는 배우지 않지만 독일에서는 배우는 것은 수와 연산 영역에서 집합, 순환소수 등 2가지, 도형 영역에서 위치, 방위, 테셀레이션 등 3가지, 규칙성 영역에서 문자의 사용, 방정식 등 2가지로 총 7가지입니다.

6) 우리나라와 핀란드의 교육과정 비교

우리나라가 핀란드보다 빨리 배우는 것은 수와 연산 영역에서 소수의 덧셈과 뺄셈, 약분과 통분, 분수와 덧셈과 뺄셈(이분모), 분수의 곱셈과 나눗셈, 소수의 곱셈과 나눗셈(자연수로 나누기) 등 5가지, 도형 영역에서 입체도형의 모양, 평면도형의 모양, 도형의 기초, 원의 구성 요소, 여러 가지 삼각형, 다각형, 직육면체와 정육면체, 각기둥과 각뿔 등 8가지, 측정 영역에서 양의 비교(길이, 들이, 무게, 넓이), 시각 읽기(몇 시, 몇시 30분), 시각과 시간(몇 시 몇 분), 시간의 덧셈, 뺄셈(초 단위까지), 삼각형과 사각형의 내각의 크기의 합, 평면도형의 둘레와 넓이, 무게와 넓이의 여러 가지 단위, 원주율과 원의 넓이, 직육면체, 정육면체의 겉넓이와 부피 등 9가지, 규칙성 영역에서 비와 비율, 정비례와 반비례 등 2가지로 총 24가지입니다.

반면 핀란드가 우리나라보다 빨리 배우는 것은 도형 영역에서 평면도형의 이동, 쌓기나무와 공간감각 등 2가지, 측정 영역에서 들이와 무게, 어림하기(반올림, 올림, 버림) 등 2가지로 총 4가지입니다.
우리나라 초등학교에서는 배우지만 핀란드에서는 배우지 않는 것은 측정 영역에서 수의 범위(이상, 이하, 초과, 미만) 등 1가지, 규칙성 영역에서 수 배열표에서 규칙 찾기, 비례식과 비례배분 등 2가지로 총 3가지입니다.
우리나라 초등학교에서는 배우지 않지만 핀란드에서는 배우는 것은 도형 영역에서 순서쌍과 좌표[1] 등 1가지, 확률과 통계 영역에서 대푯값 등 1가지로 총 2가지입니다.

핀란드에서는 규칙성 영역과 확률과 통계 영역을 별도의 단원으로 구분하여 교과서를 편성하지 않습니다. 단원과 영역간 통합 교육을 원칙으로 하는 때문입니다. 그래서 다른 영역과 철저히 통합하여 지도하기 때문에 별도의 규칙성 단원이나 통계 단원이 없습니다. 5학년 2학기에만 통계 단원이 별도로 존재할 뿐입니다. 꺾은선그래프 등 통계의 각종 그래프는 연산 학습과 통합하여 지도하고 있습니다.

2. 중학교 내용 비교 및 분석

가. 중학교 내용 비교표

〈표 Ⅱ-4〉 중학교 내용 비교표

학년	영역	우리나라	미국	일본	싱가포르	영국	독일	핀란드
1 학년 (7학년)	수와 연산	소인수분해	6	9,수A	7	5,8	7	5–8
		최대공약수, 최소공배수	6	수A	7	6,7		
		정수와 유리수의 개념, 대소 관계, 사칙계산	6,7	7,9, 수A	7	6,8	7	7,고 I
	문자와식	문자의 사용	6	7,8	6,7	7,8	7	7,8
		식의 값	6	7,8	6,7	6,8	7	7–9
		일차식의 덧셈과 뺄셈	6	7	7	7,8	7	7,9
		일차방정식	6–AI	7	7	7–9	7	7–9

1) 핀란드에서는 순서쌍과 좌표를 5학년에서 도입하기는 하지만 위치만 다룰 뿐 함수의 그래프로 연장하지는 않는다.

학년	영역	우리나라	미국	일본	싱가포르	영국	독일	핀란드
1 학년 (7학년)	함수	함수의 개념	6–8	7	7	7	8	9
		순서쌍과 좌표	5	7,수A	7	6,7	7	5,7, 고 II
		함수의 그래프	7	7,수A	7	7	8	9,고 II
	확률과 통계	줄기와 잎 그림, 도수분포표, 히스토그램, 도수분포다각형	6	7	7,8	8,10	8	고 VI
		도수분포표에서의 평균		7,수A	8	8,9		고 VI
		상대도수의 분포		7,수A			8	고 VI
	기하	점, 선, 면, 각	7	7	7	7,10	7	7
		점, 직선, 평면 사이의 위치관계		7,수A		7	7	7
		평행선의 성질(동위각, 엇각)		7	7	8,10	7	7
		삼각형의 작도	7	8	7	9,10	7	7,고 III
		삼각형의 합동 조건	7–Ge	8	8,9	9,10	7	
		다각형의 성질		8	7	9,10	7	7,고 III
		부채꼴에서 중심각과 호의 관계		7	9	9,10	10	고 III
		부채꼴에서 호의 길이와 넓이		7	9	10		8,9
		다면체, 회전체의 성질	7	7,수A	7	10		6
		입체도형의 겉넓이와 부피	6,Ge	7	7,8	7,9,10	9,10	9,고 III
2학년 (8학년)	수와 연산	순환소수	7	수A	7	8,9,10	6	7
		유리수와 순환소수의 관계	7	수A	7	9,10	9	
	문자와 식	지수법칙	6	7	9	8	8	8
		다항식의 덧셈과 뺄셈		8	7	8	7	8
		다항식의 곱셈과 곱셈공식		8	8	8	7	8
		다항식의 나눗셈		8			8	9
		등식의 변형		8	8		8	
		연립일차방정식(미지수가 2개)	8–AI	8	8	9,10	8	9,고 IV
		부등식의 성질과 일차부등식	7–AI	수A	7	9,10	8	9
		연립일차부등식		수A	9	9		

학년	영역	우리나라	미국	일본	싱가포르	영국	독일	핀란드
	함수	일차함수의 의미와 그래프	8	8	7	8,10	7	7,9,고Ⅳ
		일차함수의 활용		8	7	8,10	8	
		일차함수와 일차방정식의 관계		8	8	8,10	8	
	확률과 통계	경우의 수	7		8	8	8	
		확률과 뜻과 기본 성질	7	8	8	7,8	8	고Ⅳ
		확률의 계산	7	8	8	8,9	9	고Ⅳ
	기하	이등변삼각형의 성질		8			7	7
		삼각형의 외심, 내심		수A,수Ⅱ		9	7	
		사각형의 성질		8	7	8	7	7
		닮은 도형의 성질		9	8	9,10	8	8,고Ⅲ
		삼각형의 닮음조건	8-Ge	9	9	9,10	8	
		평행선 사이에 있는 선분의 길이와 비		9,수A	9	10	8	
		닮은 도형의 성질 활용		9,수A	9	9,10	7,8	
3학년 (9학년)	수와 연산	제곱근의 뜻과 성질	8	9	7	8,9	9	8
		무리수	8	9	6,7		9	8
		실수의 대소 관계		9	7		9	고Ⅱ
		근호를 포함한 식의 사칙계산		9,수A	7	10	9	8
	문자와 식	인수분해		9	7,8	9	7	
		이차방정식		9	8,9	8	9	고Ⅱ
	함수	이차함수의 의미		9	8	9	9	9
		이차함수의 그래프의 성질		9	8	9	9	9
	확률과 통계	중앙값, 최빈값, 평균	6	7,수A	8	7,9	7	고Ⅵ
		분산, 표준편차	7	수A	10	9		고Ⅵ
	기하	피타고라스 정리	8	9	8,9	9,10	9	8,9 고Ⅲ, Ⅳ
		삼각비		수A,수Ⅱ	9	10	9	8,고Ⅲ
		원의 현, 접선에 대한 성질		9,수A	9	9,10		고Ⅲ
		원주각의 성질		9,수A	9	10		고Ⅲ

* 미국의 Al, Ge는 각각 고등학교 교과서 AlgebraⅠ, Geometry를 뜻합니다. 일본의 수A, 수Ⅱ는 각각 고등학교 수학 교과서를 뜻합니다. 핀란드의 고Ⅰ, 고Ⅱ, … [2]는 각각 고등학교 수학 교과서 이름을 뜻합니다.
* 음영 부분은 다른 나라가 우리나라보다 늦거나 또는 늦게까지 배우는 것들을 표시한 것입니다.
* 이 표가 우리나라 교육과정을 기준으로 조사했기 때문에 우리나라가 여러 학년에 걸쳐서 배우는 것이 드러나지 않는다는 점이 문제점으로 발생했습니다. 그래서 그 부분은 표에는 나타나지 않지만 세부적인 항목을 체크할 때는 이런 사항을 감안했습니다. 예를 들면 우리나라 8학년의 확률의 계산은 우리나라 고등학교의 확률과 연결되는 주제라서 다른 나라 대부분이 우리나라와 마찬가지인 것으로 처리했습니다.

나. 중학교 교육과정 비교 · 분석

중학교 교육과정의 내용을 추출한 것은 초등학교와 달리 우리나라 교육과정 문서의 내용 체계를 기준으로 하였습니다. 우리나라 중학교 수학과 교육과정은 형식상 학년군제를 따르고 있지만 교육과정 문서는 학년별로 학습할 내용을 구분하고 있습니다.

초등학교와 마찬가지로 중학교에서도 우리나라의 교육과정의 가장 두드러진 특징은 한 가지 학습 주제를 단번에 가르쳐서 끝내는 것입니다. 그래서 우리나라에서 단번에 지도하는 것을 다른 나라에서 여러 학년에 걸쳐 지도하는 경우 다른 나라에서는 그 최종 지도시기를 기준으로 비교하였습니다. 왜냐하면 그 최종 지도시기에 배우는 정도가 가장 심화된 것이고, 거기까지 가르치는 것이 우리나라의 단번에 지도하는 것에 비교되기 때문입니다.

우리나라 중학교 과정 중 다른 나라 고등학교에 해당하는 경우는 배우지 않는 것으로 분류했습니다. 왜냐하면 고등학교의 경우 진로에 따라 과정에 따라 배우지 않을 수도 있기 때문에 중학교까지는 배우지 않는다는 것으로 분류하는 것이 타당하다고 판단했습니다.

이런 원칙으로 내용 비교를 한 결과는 다음 〈표 Ⅱ-5〉와 같습니다.

2) 판란드의 일반 인문계 고등학교 수학 교과서는 1권부터 10권까지 있다.

〈표 Ⅱ-5〉 6개국의 중학교 지도 항목 비교 · 분석표(총 60개 주제)

구분	미국	일본	싱가포르	영국	독일	핀란드	평균
우리나라가 빨리 배우는 항목 수(A)	7	20	11	29	6	20	15.5
우리나라가 늦게 배우는 항목 수(B)	18	1	15	0	9	7	8.3
우리나라에만 있는 항목 수(C)	29	8	6	12	9	25	14.8
해당 나라에만 있는 항목 수(D)	5	5	5	9	1	2	4.5
우리나라와 다른 나라의 차이 (A+C)-(B+D)	13	22	-3	32	5	36	17.5
우리나라가 많은 비율(%)	21.6	36.7	-5.0	53.3	8.3	60.0	29.2

전반적으로 우리나라 중학교 수학은 싱가포르를 제외한 다른 국가들에 비해 배우는 시기가 빠르며 양도 많은 것으로 나타났습니다. 중학교 수학 항목 60개에서 6개국 평균 17.5개(29.2%)가 우리나라가 가르치는 시기가 빠르거나 우리나라만 가르치는 것입니다.

1) 우리나라와 미국의 교육과정 비교

우리나라가 미국보다 빨리 배우는 것은 문자와 식 영역에서 일차방정식, 연립일차방정식(미지수가 2개), 부등식의 성질과 일차부등식 등 3가지, 함수 영역에서 함수의 개념 등 1가지, 기하 영역에서 삼각형의 합동 조건, 입체도형의 겉넓이와 부피, 삼각형의 닮음조건 등 3가지로 총 7가지입니다.

반면 우리나라보다 미국이 빨리 배우는 것은 수와 연산 영역에서 소인수분해, 최대공약수와 최소공배수, 순환소수, 유리수와 순환소수의 관계, 제곱근의 뜻과 성질, 무리수 등 6가지, 문자와 식 영역에서 문자의 사용, 식의 값, 일차식의 덧셈과 뺄셈, 지수법칙 등 4가지, 함수 영역에서 순서쌍과 좌표 등 1가지, 확률과 통계 영역에서 도수분포표, 경우의 수, 확률의 뜻과 기본 성질, 확률의 계산, 대푯값, 산포도 등 6가지, 기하 영역에서 피타고라스의 정리 등 1가지로 총 18가지입니다.

우리나라 중학교에서는 배우지만 미국에서는 배우지 않는 것은 수와 연산 영역에서 실수의 대소 관계, 근호를 포함한 식의 사칙계산 등 2가지, 문자와 식 영역에서 다항식의 덧셈과 뺄셈, 다항식의 곱셈과 곱셈공식, 다항식의 나눗셈, 등식의 변형, 연립일차부등식, 인수분해, 이차방정식 등 7가지, 함수 영역에서 일차함수의 활용, 일차함수와 일차방정식의 관계, 이차함수의 의미, 이차함수의 그래프의 성질 등 4가지, 확률과 통계 영역에서 도수분포표에서의 평균, 상대도수의 분포 등 2가지, 기하 영역에서 점, 직선, 평면 사이의 위치관계, 평행선

의 성질, 다각형의 성질, 부채꼴에서 중심각과 호의 관계, 부채꼴에서 호의 길이와 넓이, 이등변삼각형의 성질, 삼각형의 외심과 내심, 사각형의 성질, 닮은 도형의 성질, 평행선 사이에 있는 선분의 길이와 비, 닮은 도형의 성질 활용, 삼각비, 원의 현, 접선에 대한 성질, 원주각의 성질 등 14가지로 총 29가지입니다.
우리나라 중학교에서는 배우지 않지만 미국에서는 배우는 것은 수와 연산 영역에서 음의 지수 등 1가지, 문자와 식 영역에서 부등식의 영역 등 1가지, 확률과 통계 영역에서 표본 추출, 상관관계, 상자그림 등 3가지로 총 5가지입니다.

2) 우리나라와 일본의 교육과정 비교

우리나라가 일본보다 빨리 배우는 것은 수와 연산 영역에서 소인수분해, 정수와 유리수의 사칙계산 등 2가지, 문자와 식 영역에서 문자의 사용, 식의 값 등 2가지, 함수 영역에서 순서쌍과 좌표, 함수의 그래프 등 2가지, 확률과 통계 영역에서 도수분포표에서의 평균, 상대도수의 분포, 대푯값 등 3가지, 기하 영역에서 점, 직선, 평면 사이의 위치관계, 삼각형의 작도, 삼각형의 합동 조건, 다각형의 성질, 다면체, 회전체의 성질, 닮은 도형의 성질, 삼각형의 닮음조건, 평행선 사이에 있는 선분의 길이와 비, 닮은 도형의 성질 활용, 원의 현, 접선에 대한 성질, 원주각의 성질 등 11가지로 총 20가지입니다.
반면 우리나라보다 일본이 빨리 배우는 것은 수와 연산 영역에서 지수법칙 등 1가지뿐입니다.
우리나라 중학교에서는 배우지만 일본에서는 배우지 않는 것은 수와 연산 영역에서 최대공약수와 최소공배수, 순환소수, 유리수와 순환소수의 관계 등 3가지, 문자와 식 영역에서 부등식의 성질과 일차부등식, 연립일차부등식 등 2가지, 확률과 통계 영역에서 산포도 등 1가지, 기하 영역에서 삼각형의 외심과 내심, 삼각비 등 2가지로 총 8가지입니다.
우리나라 중학교에서는 배우지 않지만 일본에서는 배우는 것은 수와 연산 영역에서 근삿값과 유효숫자 등 1가지, 함수 영역에서 두 수 사이의 평균변화율, 불연속함수 소개 등 2가지, 확률과 통계 영역에서 모집단과 표본, 표본추출법 등 2가지로 총 5가지입니다.

일본의 교육과정은 기본적으로 나선형으로 편성하는 것을 원칙으로 하고 있습니다. 특히, 수학적인 사고력과 표현력은 합리적, 논리적으로 사고하고 지적으로 의사소통하는 데 중요한 역할을 하므로 이를 위해 지도 내용과 활동을 구체적으로 나타내도록 강조하고 있습니다. 수학 활동을 더욱 충실히 지도하기 위해 초, 중, 고 각 학년의 내용에 수학활동을 구체적으로 제시하도록 하고 있습니다(문부과학성, 2009).
일본은 교육과정의 내용 영역(확률과 통계)에서 컴퓨터의 사용을 언급하고 있기 때문에 교과서에 컴퓨터를 사용하여 학습하는 것이 우리나라에 비해 구체적입니다.

3) 우리나라와 싱가포르의 교육과정 비교

우리나라가 싱가포르보다 빨리 배우는 것은 문자와 식 영역에서 지수법칙, 연립일차부등식 등 2가지, 확률과 통계 영역에서 도수분포표, 도수분포표에서의 평균 등 2가지, 기하 영역에서 삼각형의 합동 조건, 부채꼴에서 중심각과 호의 관계, 부채꼴에서 호의 길이와 넓이, 입체도형의 겉넓이와 부피, 삼각형의 닮음조건, 평행선 사이에 있는 선분의 길이와 비, 닮은 도형의 성질 활용 등 7가지로 총 11가지입니다.
반면 우리나라보다 싱가포르가 빨리 배우는 것은 수와 연산 영역에서 순환소수, 유리수와 순환소수의 관계, 제곱근의 뜻과 성질, 무리수, 실수의 대소 관계, 근호를 포함한 식의 사칙계산 등 6가지, 문자와 식 영역에서 다항식의 덧셈과 뺄셈, 부등식의 성질과 일차부등식, 인수분해 등 3가지, 함수 영역에서 일차함수의 의미와 그래프, 일차함수의 활용, 이차함수의 의미, 이차함수의 그래프의 성질 등 4가지, 확률과 통계 영역에서 대푯값 등 1가지, 기하 영역에서 사각형의 성질 등 1가지로 총 15가지입니다.
우리나라 중학교에서는 배우지만 싱가포르에서는 배우지 않는 것은 문자와 식 영역에서 다항식의 나눗셈 등 1가지, 확률과 통계 영역에서 상대도수의 분포, 산포도 등 2가지, 기하 영역에서 점, 직선, 평면 사이의 위치관계, 이등변삼각형의 성질, 삼각형의 외심과 내심 등 3가지로 총 6가지입니다.
우리나라 중학교에서는 배우지 않지만 싱가포르에서는 배우는 것은 수와 연산 영역에서 측정값과 근삿값, 행렬, 수열 등 3가지, 문자와 식 영역에서 분수식 등 1가지, 기하 영역에서 작도 등 1가지로 총 5가지입니다.

싱가포르에서는 우리나라에 비해 생활 수학의 내용이 비중 있게 다루어지고 있습니다. 신문이나 방송에서 소개하는 사회 현상에 대한 통계 자료, 금융 거래 등 실제로 수학이 사용되는 내용을 가지고 학습하는 것이 상당한 비중을 차지하고 있습니다.
한편, 대학 입학 과정에서 실시되는 A 레벨 시험은 영국과 비슷하게 운영되고 있습니다. A 레벨 시험 범위는 우리나라 고등학교보다 넓지만 실제 문제의 내용은 대부분 간단한 개념만 묻고 있습니다. 선다형 문제는 하나도 없으며 모두가 서술형으로 구성되어 있습니다.

[그림 Ⅱ-1] 싱가포르 A 레벨 시험 문제 예시

곡선 $x-y=(x+y)^2$은 하나의 극점이 있다.

ⅰ) $1+\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{2x+2y+1}$ 임을 보여라.[4]

ⅱ) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\left(1+\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ 임을 보여라.[3]

ⅲ) 극점이 극대인지 극소인지 판별하여라.[2]

약간 어렵다고 판단되는 문제는 위 [그림 Ⅱ-1]과 같이 단계형으로 구성하고 결과를 제시하여 구하게 합니다. 따라서 학생들은 결과를 구하는 것이 아니라 그 과정을 설명하는 것을 쓰는 것입니다. 과정 중심 평가의 한 예가 될 수 있습니다. A 레벨 시험에서도 그래픽 계산기를 사용할 수 있습니다. 학생들에게는 공식집도 주어집니다. 따라서 학생들이 공식을 외울 필요는 없습니다.

4) 우리나라와 영국의 교육과정 비교

우리나라가 영국보다 빨리 배우는 것은 수와 연산 영역에서 소인수분해, 정수와 유리수의 사칙계산, 순환소수, 유리수와 순환소수의 관계 등 4가지, 문자와 식 영역에서 문자의 사용, 식의 값, 일차식의 덧셈과 뺄셈, 일차방정식, 연립일차방정식(미지수가 2개), 부등식의 성질과 일차부등식, 연립일차부등식 등 7가지, 함수 영역에서 일차함수의 의미와 그래프, 일차함수의 활용, 일차함수와 일차방정식의 관계 등 3가지, 확률과 통계 영역에서 도수분포표, 도수분포표에서의 평균 등 2가지, 기하 영역에서 점, 선, 면, 각, 평행선의 성질, 삼각형의 작도, 삼각형의 합동 조건, 다각형의 성질, 부채꼴에서 중심각과 호의 관계, 입체도형의 겉넓이와 부피, 삼각형의 외심과 내심, 닮은 도형의 성질, 삼각형의 닮음조건, 닮은 도형의 성질 활용, 피타고라스 정리, 원의 현, 접선에 대한 성질 등 13가지로 총 29가지입니다.
반면 우리나라보다 영국이 빨리 배우는 것은 단 1개도 없습니다.
우리나라 중학교에서는 배우지만 영국에서는 배우지 않는 것은 수와 연산 영역에서 무리수, 실수의 대소 관계, 근호를 포함한 식의 사칙계산 등 3가지, 문자와 식 영역에서 다항식의 나눗셈, 등식의 변형 등 2가지, 확률과 통계 영역에서 상대도수의 분포 등 1가지, 기하 영역에서 부채꼴에서 호의 길이와 넓이, 다면체와 회전체의 성질, 이등변삼각형의 성질, 평행선 사

이에 있는 선분의 길이와 비, 삼각비, 원주각의 성질 등 6가지로 총 12가지입니다.

우리나라 중학교에서는 배우지 않지만 영국에서는 배우는 것은 수와 연산 영역에서 집합, 거듭제곱근, 근삿값과 유효숫자 등 3가지, 문자와 식 영역에서 등차수열, 등비수열 등 2가지, 함수 영역에서 지수함수 등 1가지, 확률과 통계 영역에서 표본공간, 산점도 등 2가지, 기하 영역에서 도형의 이동 등 1가지로 총 9가지입니다.

영국과 우리나라는 모두 매 학년군 또는 학년에서 최종적으로 성취해야 할 기준을 제시하고 있는데, 우리나라는 수학의 내용 영역에 대한 성취 기준만 제시하는 데 비해 영국은 중등과정(Key Stage 3과 Key Stage 4)에서는 수학의 내용 영역에 대한 성취 기준 이전에 수학적 작업(Working mathematically) 영역[3]을 추가적으로 제시하고 있습니다.

5) 우리나라와 독일의 교육과정 비교

우리나라가 독일보다 빨리 배우는 것은 수와 연산 영역에서 유리수와 순환소수의 관계 등 1가지, 함수 영역에서 함수의 개념, 함수의 그래프 등 2가지, 확률과 통계 영역에서 도수분포표, 상대도수의 분포 등 2가지, 기하 영역에서 입체도형의 겉넓이와 부피 등 1가지로 총 6가지입니다.
반면 우리나라보다 독일이 빨리 배우는 것은 수와 연산 영역에서 순환소수 등 1가지, 문자와 식 영역에서 다항식의 덧셈과 뺄셈, 다항식의 곱셈과 곱셈공식, 인수분해 등 3가지, 함수 영역에서 일차함수의 의미와 그래프 등 1가지, 확률과 통계 영역에서 대푯값 등 1가지, 기하 영역에서 이등변삼각형의 성질, 삼각형의 외심과 내심, 사각형의 성질 등 3가지로 총 9가지입니다.
우리나라 중학교에서는 배우지만 독일에서는 배우지 않는 것은 수와 연산 영역에서 최대공약수와 최소공배수 등 1가지, 문자와 식 영역에서 연립일차부등식 등 1가지, 확률과 통계 영역에서 도수분포표에서의 평균, 산포도 등 2가지, 기하 영역에서 부채꼴에서 중심각과 호의 관계, 부채꼴에서 호의 길이와 넓이, 다면체와 회전체의 성질, 원의 현, 접선에 대한 성질, 원주각의 성질 등 5가지로 총 9가지입니다.
우리나라 중학교에서는 배우지 않지만 독일에서는 배우는 것은 기하 영역에서 합동변환 등 1가지입니다.

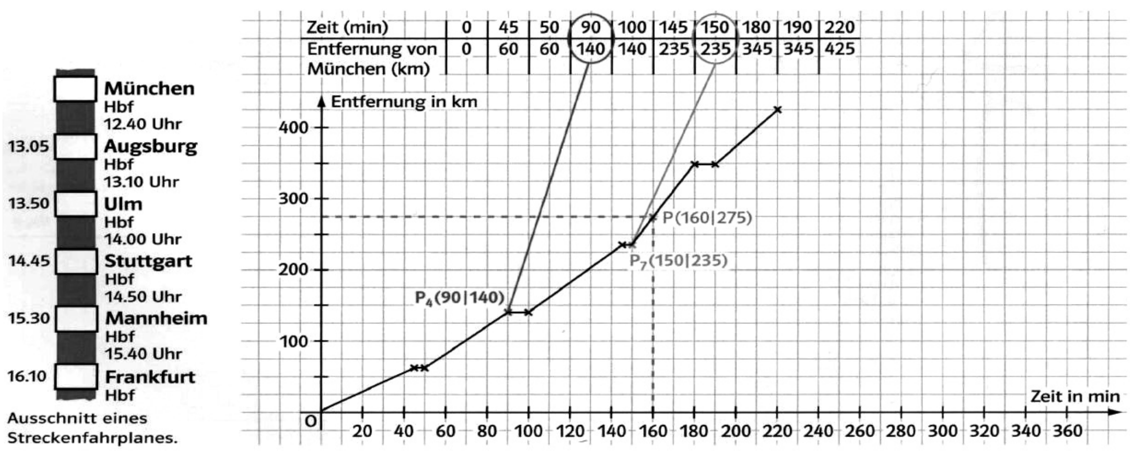
---

3) 유창성 개발, 수학적 추론, 문제해결

독일 교과서의 내용 전개 방식에 있어서 우리와 차이가 있습니다. 우리나라의 교과서는 학문중심적인 단원명과 이론의 설명과 그에 관한 문제 풀이를 중심으로 내용이 전개됩니다. 반면에 독일의 교과서는 현실 세계의 실생활과 관련한 단원명과 실제 문제 상황에서 단원의 내용을 이끌어내어 수학이 필요하고 유용할 수 있다는 것을 학습하게 하는 데 중점을 두어 전개합니다.

예를 들면, 중학교 함수 영역에서 우리나라 교과서의 단원명은 '일차함수', '이차함수'와 같은 학문 중심적인 단원명을 사용하지만 독일 교과서는 '바퀴와 톱니바퀴', '행운과 우연'과 같이 실생활 소재나 감성적인 단어를 단원명으로 사용하여 단원의 시작부터 내용 전체를 주도하고 있습니다.

[그림 Ⅱ-2] 기차 시간에 따른 위치의 변화 그래프(mathe live 7)



함수의 그래프를 다루는 데 있어서도 차이가 있습니다. 우리나라는 정비례 관계나 반비례 관계가 있는 예를 통하여 두 변량 사이의 변화표를 만들어 함수의 식을 도출하고 그 그래프를 그리는 활동이 주가 됩니다. 또한 함수의 식을 그래프로 나타내기 위하여 좌표평면에 점을 찍는 방식을 이용합니다. 독일의 함수의 그래프는 [그림 Ⅱ-2]와 같이 동적인 변화 현상을 함수로 이해하고 표현할 수 있도록 그래프의 일반적 의미와 해석 능력을 강조합니다(허난 외, 2011).

다시 말하면, 독일은 함수를 정의하기 전에 함수적 관계가 있는 실제 상황을 그래프로 묘사하는 것을 먼저 배웁니다. 이때의 현실 상황은 다양한 기울기를 갖고 있는 직선뿐 아니라 곡선의 그래프도 포함하고 있으며 일차함수의 그래프와 이차함수의 그래프는 각각의 함수를 정의한 후에 그 그래프의 특징을 관찰하는데 중점을 둡니다.

독일에서 수학교사는 국가가 정한 교육과정을 준수해야 하지만, 교육과정은 구체적이지 않고 실제로는 수업을 위한 안내서의 역할만을 합니다. 교과서는 교육과정과 밀접한 관련을 가지면서 교육과정에서 요구하는 바를 구체화하고 이에 대한 설명을 제시해야 합니다. 수학교사는 학교 동료들과 같이 여러 교과서 중 학생들에게 가장 적합한 것을 선정하거나 교사 자신이나 동료들과 같이 직접 만든 교수자료들을 사용합니다. 또한 수학교사는 자신의 교수 스타일, 숙제, 구술 또는 필기 학급 활동에 점수를 부여하는 방법뿐만 아니라 학생들의 학년 진급을 결정하며, 몇 몇 주를 제외하고는 학생들의 성취를 평가하고, 학교와 교사중심의 평가방법으로 자신의 교수를 평가하는 책임을 가집니다.

6) 우리나라와 핀란드의 교육과정 비교

우리나라가 핀란드보다 빨리 배우는 것은 수와 연산 영역에서 소인수분해, 정수와 유리수의 사칙계산 등 2가지, 문자와 식 영역에서 문자의 사용, 식의 값, 일차식의 덧셈과 뺄셈, 일차방정식, 다항식의 나눗셈, 연립일차방정식(미지수가 2개), 부등식의 성질과 일차부등식 등 7가지, 함수 영역에서 함수의 개념, 순서쌍과 좌표, 함수의 그래프, 일차함수의 의미와 그래프 등 4가지, 기하 영역에서 삼각형의 작도, 다각형의 성질, 부채꼴에서 호의 길이와 넓이, 입체도형의 겉넓이와 부피, 닮은 도형의 성질, 피타고라스 정리, 삼각비 등 7가지로 총 20가지입니다.

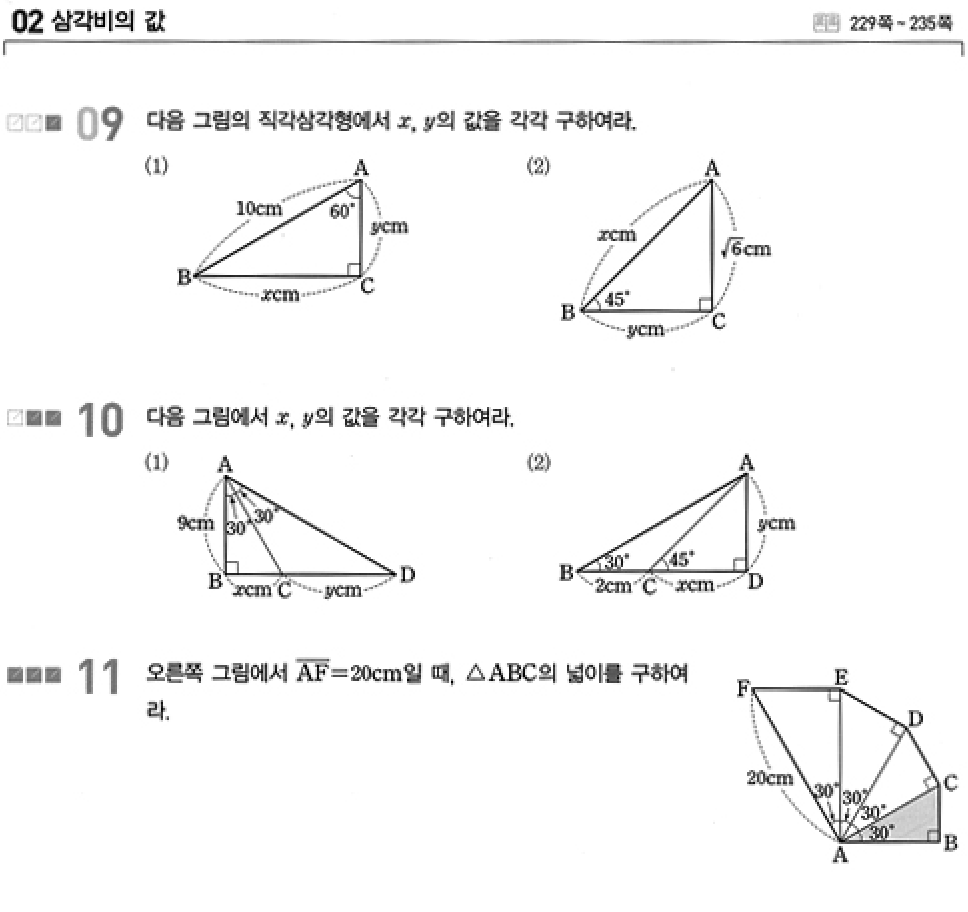
반면 우리나라보다 핀란드가 빨리 배우는 것은 수와 연산 영역에서 순환소수, 제곱근의 뜻과 성질, 무리수, 근호를 포함한 식의 사칙계산 등 4가지, 기하 영역에서 다면체와 회전체의 성질, 이등변삼각형의 성질, 사각형의 성질 등 3가지로 총 7가지입니다.

우리나라 중학교에서는 배우지만 핀란드에서는 배우지 않는 것은 수와 연산 영역에서 최대공약수와 최소공배수, 유리수와 순환소수의 관계, 실수의 대소 관계 등 3가지, 문자와 식 영역에서 등식의 변형, 연립일차부등식, 인수분해, 이차방정식 등 4가지, 함수 영역에서 일차함수의 활용, 일차함수와 일차방정식의 관계 등 2가지, 확률과 통계 영역에서 도수분포표, 도수분포표에서의 평균, 상대도수의 분포, 경우의 수, 확률과 뜻과 기본 성질, 확률의 계산, 대푯값, 산포도 등 8가지, 기하 영역에서 삼각형의 합동 조건, 부채꼴에서 중심각과 호의 관계, 삼각형의 외심과 내심, 삼각형의 닮음조건, 평행선 사이에 있는 선분의 길이와 비, 닮은 도형의 성질 활용, 원의 현, 접선에 대한 성질, 원주각의 성질 등 8가지로 총 25가지입니다.

우리나라 중학교에서는 배우지 않지만 핀란드에서는 배우는 것은 문자와 식 영역에서 수열 등 1가지, 확률과 통계 영역에서 상관관계 등 1가지로 총 2가지입니다.

핀란드 등 대부분의 나라는 계산기를 적극적으로 사용합니다. 계산기의 장점은 모든 문제의 근삿값을 구할 수 있다는 점입니다. 이 점은 학생들에게 설득력과 친근감을 줄 수 있습니다. 계산 결과가 27π라고 하는 것보다 84.82, 라고 하는 것보다 7.07m라고 하는 것이 더 설득력이 있습니다. 그리고 수학이 실제적이라는 것을 보여줄 수 있습니다.
계산기가 있으니 핀란드에서는 피타고라스 정리를 삼각비 이후에 지도할 수 있습니다. 이 상황에서는 각의 크기가 주어지지 않는 직각삼각형의 삼각비는 구할 수 없으니 다루지 않으며, 특수각을 다룰 필요도 없습니다. 문제에서도 특수각만 다루는 우리나라에 비해 특수각이 별로 없습니다. 그러므로 sin45°의 값을 무리수로 나타낼 필요가 없고, 계산기를 이용하면 그냥 0.70....이 나오니 이 값을 이용할 수 있습니다. 이런 면이 계산기를 사용하는 장점입니다.

[그림 II-3] 삼각비 단원 연습문제(우리나라 교과서)


02 삼각비의 값 229쪽~235쪽

09 다음 그림의 직각삼각형에서 x, y의 값을 각각 구하여라.

(1) (2)

10 다음 그림에서 x, y의 값을 각각 구하여라.

(1) (2)

11 오른쪽 그림에서 $\overline{AF}=20$cm일 때, △ABC의 넓이를 구하여라.

우리나라 교육과정의 교수 · 학습 방법에서도 다음과 같은 규정을 두고 계산기를 적극 사용하도록 했지만 [그림 Ⅱ-3]과 같이 우리 교과서에는 여전히 특수각만 다루고 있어서 계산기가 필요 없습니다.

> 계산 능력 배양을 목표로 하지 않는 경우의 복잡한 계산 수행, 수학의 개념, 원리, 법칙의 이해, 문제 해결력 향상 등을 위하여 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구와 다양한 교구를 활용한다.

핀란드는 한 주제를 여러 학년에서 학습하지만 우리나라는 한 주제를 가급적 한 번에 끝냅니다. 예를 들면 피타고라스의 정리는 8학년에서 증명 없이 정리를 제시하고 여러 가지 문제를 해결합니다. 9학년에서도 직각삼각형의 변의 길이를 구하는 문제를 취급합니다. 고교 Ⅲ권에서 드디어 증명을 합니다. 고교 Ⅳ권에서는 좌표평면에서 두 점 사이의 거리를 구하는 문제를 다룹니다. 반면 우리나라는 중학교 3학년에서 한 번에 가르치고 끝냅니다(자세한 내용은 Ⅳ장 참고).
다항식의 곱셈은 8학년에서는 분배법칙만으로 해결하고, 9학년에서 연립방정식 배우기 직전에 다시 학습합니다. 그리고 고교 Ⅱ권에서 비로소 공식으로 취급합니다. 반면 우리나라는 중학교 2학년과 고등학교 1학년에서 다루지만 서로 다른 내용을 다룰 뿐 수학적 아이디어나 지도 방식은 똑같습니다.

핀란드의 중학교 도형 영역에서는 증명 없이 도형의 성질을 다루고 있습니다. 다각형의 성질, 원과 접선의 성질, 이등변삼각형, 정삼각형의 성질, 사각형의 성질이 나열되지만 증명은 없고, 성질을 이용하여 문제를 해결하는 과정으로 이어집니다.

Ⅲ. 한국 수학교육에 대한 제언

우리나라는 그동안 수학교육을 위해 많은 애를 써왔습니다. 시대의 변화와 국제적 조류를 읽어내면서 여러 가지 우여곡절이 있었지만 오늘의 이 자리에 있는 것은 많은 사람들의 노력과 애씀의 결과라고 할 수 있습니다.

하지만 수학교육의 현실은 그리 밝지만은 않습니다. 특히 갈수록 증가하는 수학 사교육비 부담이 가계의 경제를 어렵게 하고, 수학 공부의 부담으로 공부 이외의 생활을 누리지 못하고 학습 노동으로 고통스러워하는 학생들이 늘어가고 있습니다. 노동자의 주당 노동시간 기준인 40시간[4)]보다 훨씬 많은 시간을 수학 공부에만 쏟는 학생들도 있습니다.

왜 어른들은 과도한 사교육비 부담으로 인한 경제적 어려움과 학생들의 수학 학습의 고통을 해결할 수 있는 대책에는 관심이 없이 돈을 벌고 공부를 시키는 데만 신경을 쓰고 있을까요? 그것은 시민들 개인으로서는 그 해결책을 마련하기가 불가능하기 때문입니다. 그러므로 정부가 강력한 정책을 시행할 필요가 있는 것입니다. 이제는 이런 소비적인 경쟁보다 근본적인 해결책을 모색해야 할 때가 됐습니다. 더 이상 이런 일을 계속 방치하는 것은 우리 모두가 불행 속으로 가는 지름길입니다. 이런 고통을 경험하면서 그 해결책을 마련하여 지금 우리보다 행복하게 공부하고 있습니다. 우리 학생들에게도, 아니 우리 성인들도 학생들의 수학 공부로 인해 더 이상 불행한 생활을 할 필요가 없습니다.

문제의 원인은 사교육에 있는 것이 아니라 공교육이 바로 서지 못한 탓입니다. 우리나라 공교육은 엄청난 문제점을 가지고 있습니다. 정부가 공교육의 정상화를 외치면서도 공교육이 바로 설 수 있는 기반 마련과 근본적인 문제 해결에 적극적이지 않고 미적거리는 사이에 사교육이 팽창했습니다. 이제는 사교육 문제를 해결하느라 역대 정권들이 사교육과의 전쟁을 선포하고 나섰지만 사교육비 지출 문제는 호전되지 않고 있습니다. 공교육이 바로 서지 못해 불신을 받고 있기 때문에 국민들은 사교육을 통해서 해결하지 않을 수 없는 것입니다.

근본적으로 사교육을 이기기 위해서 사교육과 똑같은 정책을 펴는 것으로는 문제를 해결할 수 없습니다. 방과후 학교 확대 정책은 사교육 소요를 줄인다는 명목이지만 그보다는 방과후 학교가 필요 없는, 그래서 정규 교육과정만으로 충분한 교육정책을 폈어야 합니다. 학생들은 늦은 시간까지 책과 씨름하고 싶지 않습니다. 방과후까지 공부를 해야 한다면 그것을 정규 교육과정에 편성해야 합니다. 정규 교육과정이 아닌 학습은 더 이상 필요 없는 정책을

4) 이과의 경우 주당 5단위짜리 수학 두 과목을 하면 수업 시간만 10시간, 예습이나 준비 그리고 복습과 숙제를 한다면 하루에 적어도 2시간 이상 걸리니 주당 10시간, 방과후 보충수업을 매일 1시간만 수강해도 주당 5시간, 학원이나 EBS 인강 등을 듣는데 주당 5시간, 이것을 예습하고 복습하는데 주당 5시간, 주말에 학원이나 인강이나 혼자 수학 공부하는 시간이 5시간만 돼도 벌써 40시간이 된다. 이 정도는 평범한 학생의 일과일 뿐이다. 만약 과외나 학원 수강이 더 추가되는 학생은 주당 수학 학습 시간은 40시간을 훌쩍 넘기게 된다.

펴는 것이 사교육을 잡는 최고의 방법일 것입니다.
우리는 우리나라의 수학교육의 미래를 위해 5가지 제언을 하고자 합니다. 우리는 사교육에 대한 대책을 말하고자 하는 것이 아닙니다. 공교육이 학생들의 삶의 질을 높이고 창의 · 융합형 인재를 양성하기 위한 목표를 정확히 달성하면 수학교육의 여러 문제가 해결될 것이라고 생각합니다.
우리나라 수학교육은 모두의 노력으로 여기까지 왔습니다. 앞만 보고 달려온 덕에 그래도 이만큼이라도 성장했습니다. 그러나 수학교육으로 인한 상처와 아픔 또한 커다란 문제로 떠오르고 있습니다. 지금은 숨가쁘게 달려온 과거를 보다 겸허하게 되돌아보고 반성할 것을 찾아 보완해야 할 때입니다. 우리나라 수학교육은 뭐가 부족해서 문제가 아니라 너무 넘쳐서 문제입니다. 양적으로 풍부한 여건이기 때문에 여기에 질적인 변화를 가미하면 국제적으로 우수한 위치에 올라설 수 있습니다.
5가지 제언은 다음과 같습니다. 수능 수학 시험과 수학과 교육과정이 근본적으로 변해야 합니다. 거기에 따라서 수학 교과서가 바뀌어야 합니다. 그리고 교사들의 수학 교수법, 학생들의 수학 학습법과 평가 제도가 달라져야 합니다. 이외에도 영재교육과 수학 경시대회의 문제점, 그리고 이 모든 것을 지원할 국가 예산과 법률적인 보장 등을 제안할 것입니다. 이중 일부 내용은 오후 세션을 통해서 좀 더 구체적으로 논의할 것입니다.

1. 수능 수학 시험에 얽힌 문제

대입시에서 수능 시험은 절대적인 영향력을 가지고 있습니다. 그 영향력 중에서도 가장 강력한 과목은 수학입니다. 수학 점수가 문학가나 시인은 물론이고 외교관이나 고고학을 공부하려는 학생들의 진학에서 결정적인 역할을 하고 있습니다. 다른 과목에서 만점을 맞아 1등급이 받아도 수학에서 몇 개 틀려서 2등급을 받은 학생보다 불리한 경우도 허다합니다.
이처럼 대입시에 가장 큰 영향력을 가지고 있는 수학 시험에는 몇 가지 문제점을 가지고 있습니다.

가. 과다하고 획일적인 수능 수학 시험 범위

고등학교 학생들은 진학하고자 하는 대학전공에 상관없이 문 · 이과 계열별로 똑같은 수능 수학 시험을 치러야 합니다. 시험 범위는 계열별로 배우는 수학 과목 전부입니다. 현재 고1

과 고2 기준으로 보면 문과는 수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 미적분Ⅰ, 확률과 통계를 배우는데 시험 과목은 수학Ⅱ, 미적분Ⅰ, 확률과 통계입니다. 수학Ⅰ이 직접적인 시험 범위에서 빠져 있지만 수학Ⅰ(다항식, 방정식 등)에서 배우는 내용은 이후 다른 과목을 학습하는 기초가 되기 때문에 공부를 안 할 수가 없습니다. 이과는 수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 미적분Ⅰ, 확률과 통계 외에 미적분Ⅱ와 기하와 벡터까지 배우는데 시험 과목은 미적분Ⅱ, 확률과 통계, 기하와 벡터입니다. 6과목 중 3과목을 시험보지만 수학의 학습 위계상 수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 미적분Ⅰ의 내용을 모르면 시험 과목을 공부할 수 없기 때문에 역시 전 과목이 시험범위라 할 수 있습니다.

〈표 Ⅲ-1〉 수능 수학 시험범위 (현재 고1, 고2 해당)

	구분	문과 시험범위	이과 시험범위
수학Ⅰ	문이과 공통	○	○
수학Ⅱ	문이과 공통	●	○
미적분Ⅰ	문이과 공통	●	○
미적분Ⅱ	이과	X	●
확률과 통계	문이과 공통	●	●
기하와 벡터	이과	X	●

● : 공식적 시험범위 / ○, ● : 실제적 시험범위

다른 교과와 비교해보면 수학 시험 범위만이 예외적으로 모든 배우는 과목이 필수화 되었다는 것을 알 수 있습니다. 국어와 영어처럼 과목 선택이 큰 의미가 없는 영역을 제외하고, 사회 탐구영역은 9과목 중 2과목, 과학 탐구영역은 8과목 중 2과목, 직업탐구 영역도 10과목 중 2과목, 제2외국어와 한문도 9과목 중 1과목을 선택하고 있습니다.

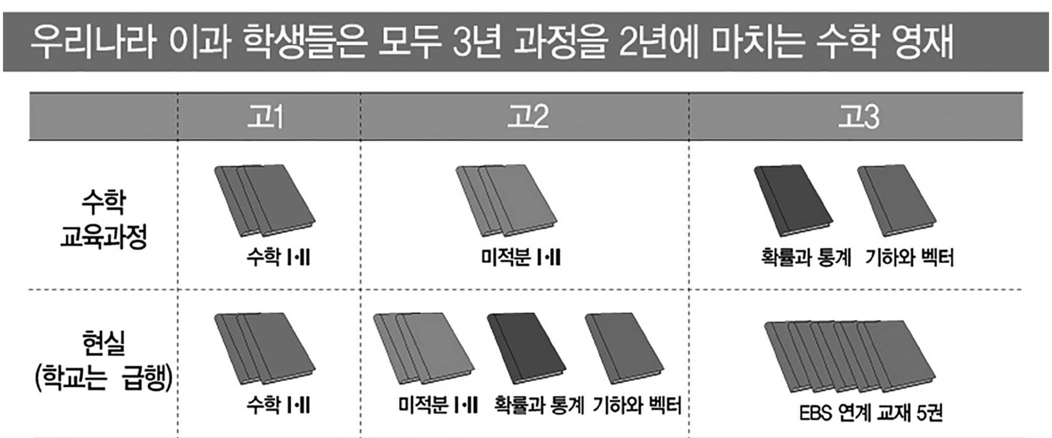
〈표 Ⅲ-2〉 2017 수능 체제

영역	주요 내용
국어 · 영어	공통 (수준별 수능 폐지)
수학	문 · 이과 구분 (나/가형)
탐구	수험생이 선택한 영역에서 2과목 응시 (사회 : 9과목 중 택2 / 과학 : 8과목 중 택2 / 직업 : 10과목 중 택2)
한국사	필수 과목으로 지정
제2외국어/한문	9과목 중에서 1과목 응시

수학 과목의 시험 범위가 과도하게 넓은 것은 이과의 경우 정상적인 교육과정 운영을 불가능하게 한다는 것이 더 큰 문제입니다. 이과 학생들이 고2, 3에 걸쳐서 4학기 동안 배워야 하는 수학 과목은 4개(미적분Ⅰ, 미적분Ⅱ, 확률과 통계, 기하와 벡터입니다. 한 학기에 한 과목씩 배우면, 수능을 치는 11월에 마지막 과목은 절반 밖에 배우지 못합니다. 게다가 EBS-수능 70% 연계 정책으로 EBS 교재가 3학년 교육과정이 되었는데 이렇게 풀어야 하는 책의 권수가 수능특강 4권, 수능완성 4권 등 8권입니다. 교육부는 2014년 말에 발표한 사교육 경감대책에서 수능완성 4권을 합본하여 1권으로 만들어 3권을 줄이겠다고 발표했지만 이는 조삼모사 격일뿐입니다.

이런 이유로 고등학교 이과 수학의 경우 구조적으로 파행 운영이 될 수밖에 없습니다. 그래서 어려운 이과 수학을 한 학기에 2과목 이상 배우기도 하고, 학기 중 방과후 수업 또는 방학을 이용하여 교과 진도를 나가기도 합니다. 심한 경우는 개설된 과목과 상관없이 선행 진도를 나가는 경우도 비일비재했습니다. 그런데 '공교육 정상화 촉진 및 선행교육 규제에 관한 특별법'(이하 '선행교육 규제법')의 제정으로 이와 같은 관행까지 제동이 걸린 상태입니다. 이렇게 정상적인 교육과정으로도 나갈 수 없는 구조는 중학교는 물론 초등학교 학생과 학부모에게까지 공포심을 심어줘 초등학교 5, 6학년 때 고등학교 1학년 수학까지는 미리 공부해야 한다는 것이 마치 정상적인 것처럼 유행하고 있습니다.

[그림 Ⅲ-1] 고등학교 이과생들의 수학 교육과정과 실제 운영의 비교



나. 문과쪽 진학에도 영향을 주는 수학 점수 반영 비율

1) 수시 모집에서의 영향력

수시 모집에서 수학의 문제점으로 지적할 수 있는 것은 두 가지입니다. 첫째는 인문계 논술 전형 문제에서 모집단위에 상관없이 수학 문제가 출제되어 온 경우고, 둘째는 최저학력기준 적용에 있어서 역시 수학과 관련 없는 모집단위에서 수학을 필수로 정하거나 지나치게 높은 수학 등급을 요구하는 경우입니다.

문과쪽 논술전형에서 수학 문제를 출제하는 경우 대부분 상경계열에 특성화시키고 있는 것을 볼 수 있습니다. 상경계열은 진학 이후에 수학을 필요로 하는 대표적인 문과라고 할 수 있습니다.

〈표 Ⅲ-3〉 2015학년도 대학별 인문계 논술 유형

대학별 논술 유형(인문계 유형) 출처: 종로학원

언어사회 통합형	건국대(인문사회Ⅰ), 경기대, 경북대, 동국대, 서강대, 서울과기대, 성균관대, 숭실대(인문) 세종대, 아주대, 연세대(서울/원주), 중앙대(인문), 한양대(인문/에리카), 홍익대
언어사회 · 영어	경희대, 이화여대(인문Ⅰ), 한국외대(서울/글로벌)
언어사회 · 수학	건국대(인문사회Ⅱ), 고려대, 숭실대(상경), 이화여대(인문Ⅱ), 중앙대(상경), 한양대(상경)
언어사회 · 도표, 통계	가톨릭대, 광운대, 단국대, 서울시립대, 숙명여대, 인하대, 한국항공대

출처 : 종로학원

그런데 상경계열이 아닌 인문계 전체에 수리논술 문제를 출제하는 대학이 있습니다. 고려대학교를 보면 상경계가 아닌 일반 인문계 전체를 대상으로 수리논술 문제를 출제하고 있습니다. 그런데 그 수리논술 문제가 매우 어려워서 당락에 결정적인 영향을 끼칠 가능성이 큽니다. 문과 학생으로 수학 과목에 약점이 있는 학생의 경우 수학 때문에 대학 진학에 결정적인 영향을 받습니다.

다음 예시 문제는 2014학년도 고려대 인문계 A형 문제입니다. 이 문제에서 사용된 분산의 개념은 2009 수학과 교육과정 기준으로 중학교 3학년 수학에 해당됩니다. 사용되는 수학적 지식은 중학교 과정이라도 그 문제를 읽고 이해하는 것조차 쉽지 않습니다. 수학을 좋아하

거나 수학 실력이 좋은 학생이 아니라면 이 문제로 인해 수학과 관련 없는 일반 인문계 학과를 지원했을 지라도 떨어질 가능성이 상당히 높을 것입니다.

[그림 Ⅲ-2] 2014학년도 고려대 인문계 A형 논술문제

'빈 섬'에는 12명의 농민이 살고 있다. 전체 농민의 1/3은 각각 2필지의 논을 소유하고 있고, 2/3는 각각 1필지의 논을 소유하고 있다. 전체 논의 1/2은 비옥하며, 나머지 1/2은 비옥하지 않다. 비옥한 논에서는 한 해에 필지 당 10단위의 쌀이 생산되지만, 비옥하지 않은 논에서는 한 해에 필지 당 6단위의 쌀이 생산된다.

'빈 섬'의 농민들은 자기가 소유한 논의 필지 수와 비옥도에 따라 다음과 같이 5가지 유형으로 나누어진다.

농민 유형	농민 수	필지 수	비옥도
I	1	2	둘 다 비옥함
II	2	2	둘 중 하나만 비옥함
III	1	2	둘 다 비옥하지 않음
IV	4	1	비옥함
V	4	1	비옥하지 않음

'빈 섬'에서 한 농민이 내야 할 세금이 자신의 연간 쌀 생산량보다 적거나 같은 경우에는 경작을 해서 세금을 내고, 많으면 자신이 소유한 모든 논의 경작을 미리 포기함으로써 세금을 내지 않는다. 따라서 한 농민이 내야 할 세금이 6단위라면 모든 유형의 농민이 경작을 해서 세금을 내지만, 세금이 더 많아지면 세금을 내는 농민 유형의 수는 감소할 수 있다.

세금을 부과하는 데 다음의 세 가지 방식을 고려해 볼 수 있다.

㉮ 각 농민 당 세금 S를 부과한다.

㉯ 각 필지 당 세금 T를 부과한다.

㉰ 비옥한 논에는 필지 당 세금 X를, 비옥하지 않은 논에는 필지 당 세금 Y를 부과한다.

S, T, X, Y 각각은 양의 실수이고, 조세 수입은 농민들이 낸 세금의 총합이다.

[문제]

1. ㉮의 방식을 사용할 경우, 농민 당 세금 S가 얼마일 때 이 섬의 조세 수입이 가장 크게 되는가? 이 때 각 유형별로 농민 당 세후 쌀 보유량을 구하시오.

2. ㉯의 방식을 사용할 경우, 필지 당 세금 T가 얼마일 때 이 섬의 조세 수입이 가장 크게 되는가? 이 때 각 유형별로 농민 당 세후 쌀 보유량을 구하시오. 농민들의 세후 쌀 보유량 분포라는 관점에서 ㉮의 분산과 ㉯의 분산을 비교하시오.

3. 농민들은 자기 필지의 비옥도를 자신만 알고 있다. ㉰의 방식을 사용할 경우, 농민들은 자기 필지의 비옥도를 사실대로 보고할 수도 있고 거짓으로 보고할 수도 있다. 사실대로 보고할 때의 세후 쌀 보유량이 거짓으로 보고할 때의 세후 쌀 보유량보다 크거나 같다면 농민은 사실대로 보고한다. 단, 각 필지 당 필지의 비옥도에 대해 거짓으로 보고하면 거짓말에 따르는 비용으로 생산이 1단위만큼 줄어든다. 모든 농민들이 자기 필지의 비옥도를 사실대로 보고하게 만드는 세금 X와 Y 중 이 섬의 조세 수입을 가장 크게 하는 X와 Y의 값은 무엇인가? ㉯의 최대 조세 수입과 ㉰의 최대 조세 수입을 비교하시오.

수시 모집에서의 또 하나의 문제점은 수능 최저학력기준 적용에 있습니다. 논술 우선선발 전형의 경우 너무 과도한 수능 최저학력기준을 적용하고 있습니다. 또한 수시 모집에서 수학

과 크게 상관없는 모집단위에서도 수학을 필수로 지정하는 문제가 있습니다. 많은 대학들은 논술 우선선발 전형을 폐지하고, 모집단위에 따른 수능 최저학력기준이 달랐던 대학들이 이를 개선하여 현재는 큰 문제점이 있는 것은 아니지만, 연세대와 같이 인문계에서도 국어B, 수학A, 영어, 탐구(1과목)중 4개 영역의 등급 합의 최저기준을 6으로 정하여 수학에서 높은 성취를 요구하는 것은 수능으로 뽑을 수 없는 다양한 재능과 능력의 학생을 뽑겠다는 수시 전형의 취지를 생각할 때 과도한 측면이 있습니다.

2) 정시 모집에서의 영향력

정시 모집에서 수능 점수를 반영하는데 있어서 수학의 비율은 다른 교과에 비해 상대적으로 높습니다. 자연계라면 타당하지만 인문계에서도 수학 점수 반영 비율이 국어보다 높은 것은 타당하다고 보기 어렵습니다. 다음 〈표 Ⅲ-4〉를 보면, 서울 주요 10개 대학 정시모집 인문계 수능 반영 비율을 보면 평균 29.33%로 가장 높은 영어 29.74%와 0.41% 밖에 차이가 나지 않고, 인문계임에도 오히려 국어보다 2.3% 높습니다. 실제로 10개 대학의 12개의 모집단위에서 국어보다도 반영 비율이 낮은 경우는 경희대 인문과 한국외대 밖에는 없습니다. 그리고 탐구 영역은 대부분 2과목을 반영하면서도 반영 비율이 평균 15%도 되지 않았고, 15%를 넘는 경우는 서울대와 성균관대 나군 인문계 모집밖에 없습니다.

〈표 Ⅲ-4〉 서울 주요 10개 대학 정시모집 인문계 수능 반영 비율

대학		국어	수학	영어	탐구
경희대	인문	30	25	30	15
	사회	20	35	30	15
고려대		28.6	28.6	28.6	14.2
서강대		25	32.5	32.5	10
서울대		25	30	25	20
서울시립대		28.6	28.6	28.6	14.2
성균관대	가군	30	30	30	10
	나군	20	30	30	20
연세대		28.6	28.6	28.6	14.2
중앙대		30	30	30	10
한국외대		30	25	35	10
한양대		28.6	28.6	28.6	14.2
평균		27.03	29.33	29.74	13.90

다. 상대평가로 인한 수학 시험 문제의 왜곡

우리나라 대입시에 사용된 전국적인 고사(예비고사, 학력고사, 대학수학능력시험 등)는 항상 상대평가 방식을 채택해왔습니다. 너무 오랫동안 지속된 상대평가의 관성은 오늘날 학교교육의 본말을 뒤집게 되었는데, 이제는 그것이 어쩔 수 없는 것으로 치부되고, 마치 우리나라만의 고유의 문화인양 굳어지고 있어서 더욱 난감합니다. 흔히들 인구는 많은데 문이 좁으니 경쟁은 어쩔 수 없는 선택이라고 하는 말이 그것입니다. 그래서 경쟁에서 뒤처지는 학생들에게만 책임이 돌아갑니다.

학생들은 교과의 완전학습이라는 본래의 학습 목표를 인식하지 못하는 사이에 친구들과의 경쟁에서 이기는, 그래서 상위권 성적으로 유지하는데 골몰하는 것이 학습의 주된 목표이자 동기가 되었습니다. 다른 나라에서는 있을 수 없는 이상한 교육이 우리나라에서는 정설인양 유행하고 있습니다. 교육기관이나 교육자로서 절대로 용납할 수 없는 일들이 성행하고 있는데, 예를 들면, 기출 문제를 보고 반복적으로 풀이 방법을 암기하고 연습하는 학습, 시험 대비 숙제를 내는 것, 시험 대비 학습 등입니다.

심지어는 학업성취도평가에서 ‘수준 미달’ 학생 수의 변화가 교육부의 각 시도교육청 평가항목이 되고, 이것으로 예산을 배정하니 각 시도교육감은 ‘수준 미달’ 학생 수를 줄이기 위해 초등학생들을 밤까지 학교에 남겨서 시험대비 연습을 하도록 하고 있습니다.

학교 교육의 목표가 모든 학생이 정해진 교육과정의 성취 기준을 달성하도록 하는데 있는데, 실제로 학교에서 하는 교육의 결과는 1등부터 꼴등까지 줄 세우는 것밖에 없다고 해도 과언이 아닙니다. 평가의 일차적인 목적은 학생들이 성취 기준에 얼마나 도달하고 접근했는지, 그리고 미달한 학생들에게 어떤 도움을 주어야 하는지를 파악하는데 있습니다. 누가 1등인지를 파악하는데서 평가의 존재 이유를 찾고, 결국 상대평가의 관성이 학교 교육을 지배하는 사태를 방임해서는 안 됩니다.

학교 교육은 학생들의 성장을 돕고, 학생들 모두가 미래 사회에 필요한 인재로 적응할 수 있도록 하는데 그 존재 이유가 있습니다. 그러기 위해서 학교 수업은 탐구 중심이어야 하며, 21세기의 핵심역량인 의사소통 능력과 과학기술 처리 능력 등을 키워내야 합니다. 그러나 상대평가 체제는 이런 모든 것을 무력화시키고 있습니다.

수학에서 오지선다형이 주를 이루는 시험 문제로 1등급 4%를 가려내는 일은 정상적인 교육을 통해서 도달하기 어렵습니다. 그래서 비정상이 정상인 것처럼 여겨집니다. 교육과정에 규정된 성취 기준에 맞게 출제를 했다가는 만점자가 4%를 넘어갈 가능성이 큽니다. 그러므로 성취 기준에 없는, 그래서 정상적인 학교의 교육을 통해서는 도저히 대비할 수 없는 문제를 출제해야 1등급이 무난하게 가려집니다. 수능 출제의 가장 중요한 핵심을 여기에 두는 한 수능 시험은 교육적이지 않습니다. 공교육의 정상적인 교육을 방해합니다. 학교 수업의 목

적을 수학적인 사고력 향상, 탐구 능력 제고에 두지 못하고 기출 문제를 분석하여 출제 유형에 맞는 문제 풀이 훈련을 시키는 사교육의 교육 행태를 답습하고 있습니다. 명분은 '사교육을 이기는 공교육'이라고 합니다.

최근 수능 수학에서는 단답형 30번 문제가 가장 어려운 문제로 자리를 잡아가고 있습니다. 단답형 30번 문제는 만점방지용이라는 소문에서도 알 수 있듯이 문제 자체가 지나치게 어렵고 복잡하게 꼬여 있다는 비판이 거셉니다. 교사들마저 수능 시험이 끝나면 30번부터 풀어봅니다. 이 문제는 교사들도 풀기 어렵습니다.
대개 30번 문제는 표준적인 풀이가 A4 한 장을 훌쩍 넘는 경우가 흔합니다. 한 문제만으로 따진다면 100분에 30문제를 풀어야 하는 시간을 고려할 때 정상적인 교육을 받고 준비해서는 해결 불가능합니다. 물론 이런 문제는 교육과정의 성취 기준 그 어디에도 없는 국적 없는 문제입니다. [그림 Ⅲ-3]의 2015학년도 수학 A형 30분 문제를 보겠습니다.

[그림 Ⅲ-3] 2015학년도 대입 수능 수학 A형 30번 문항

30. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 삼각형 OAB의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(1)+f(2)+f(3)$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

(가) 점 A의 좌표는 $(-2, 3^n)$이다.
(나) 점 B의 좌표를 (a, b)라 할 때, a와 b는 자연수이고 $b \le \log_2 a$를 만족시킨다.
(다) 삼각형 OAB의 넓이는 50 이하이다.

이 문제의 출제 단원은 〈수학Ⅰ〉의 로그함수일 것입니다. 그런데 이 문제는 로그함수와 별 관련이 없습니다. 삼각형이나 사다리꼴의 넓이를 수식으로 나타내고 나면 부등식이 나오게 되는데 이런 부등식은 교육과정에서 다루는 것이 아닌 주로 경시대회에서 출제되는 성격의 문제입니다. 언제 이런 문제 푸는 법을 배워야 하는지, 꼭 풀 수 있어야 하는지가 불분명합니다.
(나)에 주어진 $b \leqq \log_2 a$라는 조건만으로 $y=\log_2 x$라는 로그함수의 그래프를 생각해내기 어렵고, 이것을 로그함수의 그래프와는 성격이 전혀 다른 부등식의 영역으로 연결하고 있습니다.

로그함수에 대한 교육과정의 성취 기준은 다음과 같습니다.

3 로그함수와 그 그래프
① 실생활 상황을 통해 로그함수의 뜻을 안다.
② 로그함수의 그래프를 그려보고, 그 성질을 이해한다.

수능 수학 시험 문제 중에는 고등 사고력이나 개념을 측정하는 문항보다는 위와 같이 전혀 무관한 영역을 억지로 짜 맞춰서 한 문제 속에 여러 개념이 섞여 있기 때문에 각 영역별로 교육과정과 교과서의 성취 기준에 맞춰 순수하게 공부한 학생들은 당황합니다. 행렬 문제 속에 전혀 엉뚱한 삼각함수나 로그가 행렬의 성분으로 들어가서 행렬을 이해한 학생들조차 삼각함수나 로그를 연결시키지 못해 손을 대지 못하는 현상이 벌어지고 있습니다. 즉, 학생들의 진정한 수학적(數學的)인 능력을 평가하기보다, 변별과 등급 구분을 위해서 지나치게 어려운 문제들이 출제됩니다.
이런 문제는 교육과정의 성취 기준에 충실한 교과서로 학습하는 학교의 정상적인 교육만으로 충분히 대비할 수 없기 때문에, 학교 밖에서 이루어지는 사교육 영향력이 상대적으로 커지게 됩니다. 수학 과목에 유독 선행학습이 유행하고 집중되는 것도 같은 맥락입니다.

제7차 교육과정부터 우리나라는 국가 수준에서 성취 기준과 성취 수준[5]을 만들어 학교 현장에 보급하여 각 학교가 교육과정의 목표에 부합되는 평가를 실시할 수 있도록 지원하고 있습니다. 그런데 수능 시험이 국가 수준의 성취 기준에 없는 문제를 출제하고 있는 것이 문제입니다. 국가 수준에서 성취 기준과 성취 수준을 개발하는 목적은 이를 학교 교육 현장에 보급함으로써 학교에서의 교수ㆍ학습 활동 및 평가 활동을 안내하고 개선하는 데 있습니다. 수학과 성취 기준과 성취 수준을 통하여 무엇을 가르치고 배우도록 할 것인지를 분명하게 제시함으로써 교사의 교수ㆍ학습 과정과 평가 방향을 제시하고 학생의 교육 성취 정도에 대한 판단 및 정부의 교육과정 질 관리 정책의 판단 준거로 삼을 수 있도록 하는 데에 그 의의가 있다고 볼 수 있습니다.
국가에서 관리하고 출제하는 수능 시험은 반드시 성취 기준과 성취 수준을 지켜야 합니다. 수능 시험이 교육과정의 성취 기준을 어기면 학교의 수업만으로 대비가 불가능하고, 교육이 학교의 정상적인 수업으로 완성되지 않기 때문에 추가적인 교육이 필요하게 됩니다. 국가 수준에서 출제를 관리하는 수능 시험 문제는 전국의 모든 학생에게 공부의 방향과 양과 질

5) 성취 수준이라는 용어는 2009 개정 교육과정에서 처음 사용했고, 제7차 교육과정과 2007 개정 교육과정에서는 평가 기준이라는 용어를 사용하였다.

의 기준이 되는 현실에서 교육부는 스스로 만든 성취 기준에도 없는 문제를 수능 시험에 출제하는 것을 방기해왔습니다. 이것으로 인하여 공교육의 정상화가 저해되었으며 학생들은 교육과정의 성취 기준을 벗어난 문제를 공부해야만 했습니다.

라. 수능 수학 시험 개선 방안

가장 부담이 되고 있는 수능의 수학 필수 시험범위를 ‘수리 나’(인문계)는 ‘수학 I ’과 ‘수학 Ⅱ’로, ‘수리 가’(자연계)는 ‘수학 I ’, ‘수학 Ⅱ’, ‘미적분 I ’으로 축소하고, 선택과목에 대해서는 필요한 학생이 자신이 원하는 진로(전공)의 특성에 따라 한 과목을 응시하도록 해야 합니다. 이 때 선택과목에 대해서는 각 대학이 전공계열(예를 들어, 인문/상경/생명공학/이공계열)의 특성을 고려하여 필수과목을 지정한다면, 학생들이 단순히 점수 따기에 유리한 과목을 선택하는 것이 아니라 자신의 진로(전공) 희망에 따라 선수학습이 이루어지도록 유도할 수 있을 것입니다.

〈표 Ⅲ-5〉 수능 수학 시험범위 선택과목 전환(안)

<table>
<tr><th></th><th>구분</th><th>문과 시험범위</th><th>이과 시험범위</th></tr>
<tr><td>수학 I</td><td>문이과 공통</td><td>필수</td><td>필수</td></tr>
<tr><td>수학 II</td><td>문이과 공통</td><td>필수</td><td>필수</td></tr>
<tr><td>미적분 I</td><td>문이과 공통</td><td rowspan="2">선택1</td><td>필수</td></tr>
<tr><td>확률과 통계</td><td>문이과 공통</td><td rowspan="3">선택1</td></tr>
<tr><td>미적분 II</td><td>이과</td><td>X</td></tr>
<tr><td>기하와 벡터</td><td>이과</td><td>X</td></tr>
</table>

수학 시험범위를 축소하는 것은 부담 완화 차원에서뿐만 아니라 진로와 적성에 따라 과목을 선택할 수 있도록 보장하는 고교 교육과정의 취지에도 정확히 부합하는 것입니다. 현재 수능은 학생의 진로와 적성, 학업성취도 등과 무관하게 모든 학생들이 문/이과에 편성된 모든 과목을 이수하도록 강요하고 있습니다. 예를 들어, 문과의 경우도 상경계열을 희망하는 경우가 아니라면 학업성취도가 높은 학생일지라도 ‘미적분 I ’이나 ‘확률과 통계’와 같은 과목을 들을 필요가 없습니다. 오히려 그 시간에 자신이 관심 있는 과목이나 활동에 투자하는 것이 바람직할 것입니다. 하지만 수능은 정반대로 불필요하지만 입시에서 중요한 수학 과목에 집

중하도록 만드는 구조입니다. 이런 상황에서 학생은 관심이 덜 하고 상대적으로 어려운 과목이기 때문에 사교육에 더욱 의존할 수밖에 없게 됩니다.

또한 수학 시험범위를 축소하고 일부를 선택하도록 만들면, 수학에 어려움을 겪는 학생들이 굳이 선택을 할 필요가 없어지기 때문에 소위 '수포자'를 양산하고 있는 상황에 대한 해결책이 될 수 있습니다. 현재 고3 교실의 수학 시간에는 자신의 의사와 무관하게 수학을 선택하고 들러리가 되는 학생의 수가 많습니다.

이와 관련하여 사교육걱정은 시민을 대상으로 설문조사를 진행한 바가 있습니다. 그중 한 질문은 2017 수능 개편안의 대안으로 제시한 수학 시험범위에 대한 시민들의 반응을 보고자 한 것이었습니다. 〈표 Ⅲ-6〉을 보면 응답 결과 76%가 우리 단체의 제안에 대해 찬성을 하였으며, 심지어 15%는 시험범위를 더 줄여야 한다고 하였습니다. 절대 다수의 시민들은 수학 시험범위를 타당성 있게 줄여야 한다고 생각한 것입니다.

〈표 Ⅲ-6〉 사교육걱정의 수능 수학시험범위 안에 설문조사 결과

◈ 사교육걱정없는세상은 수능에서 수학 시험범위로 문과는 1학년 때 배우는 '수학Ⅰ', '수학Ⅱ' 두 과목을 필수로 하고 '확률과 통계'와 '미적분Ⅰ'중 한 과목을 선택으로, 이과는 '수학Ⅰ', '수학Ⅱ', '미적분Ⅰ' 세 과목을 필수로 하고 '확률과 통계', '미적분Ⅱ', '기하와 벡터' 중 한 과목을 선택으로 하는 안을 제안하려고 합니다. 이 안에 대해서 어떻게 생각하십니까?

사교육걱정없는세상의 개선안에 대해서 찬성한다.	**408**	**76%**
사교육걱정없는세상의 개선안도 시험범위가 많다. 더 줄여야 한다.	**81**	**15%**
필수와 선택 과목에 대해 의견이 달라서 반대한다.	21	4%
어떤 이유든지 시험범위를 줄이는 것에는 반대한다.	8	1%
잘 모르겠다.	16	3%
No Answer	3	1%

시험 범위를 줄임과 동시에 또 하나 해야 할 일은 수능 수학 시험도 영어와 마찬가지로 절대평가화하는 것입니다. 사교육걱정에서 수능 영어 절대평가 도입이 수학에 미치는 영향에 관한 인식을 조사하기 위해 2015년 1월 14일부터 1월 21일까지 설문을 실시하였고, 시민 833명이 참여하였습니다. 그 중 수학도 절대평가로 바뀌어야 한다는 의견에 대해 〈표 Ⅲ-7〉과

같이 전체 응답자의 86%가 수능에서 수학도 절대평가를 도입해야 한다는 것에 동의하였습니다.

〈표 Ⅲ-7〉 수능 수학 절대평가 도입 필요성에 대한 설문조사 결과

◈ 수능 영어 절대평가만 도입되면 수학에 대한 학습 고통과 사교육비 부담이 커질 것이기 때문에, '수학' 교과도 수능에서 절대평가로 바꾸어야한다는 지적이 있습니다. 어떻게 생각하십니까?

동의한다.	716	86%	
동의하지 않는다.	111	13%	
No Answer	6	1%	

2018학년도부터 적용되는 수능 영어 절대평가는 현 중3부터입니다. 따라서 직접적으로 연관이 있는 현 중3 이하의 학부모인 초등학교와 중학교의 학부모 응답자만으로 교차분석을 실시해본 결과, [그림 Ⅲ-4]와 같이 중3 이하의 학부모 들 중 응답자의 90%가 절대평가에 찬성하였습니다. 직접적인 연관이 없는 고등학교 이상의 학부모는 이보다 낮은 수치인 84%가 찬성하였습니다.

[그림 Ⅲ-4] 수능 수학 절대평가화에 대한 자녀의 학교급별 설문조사 결과

학교 교육의 목표는 1등하는 학생 한 명을 만들고 상위 10%만 키워내는 데 있는 것이 아니라 모든 학생이 최소한의 학습 목표에 이르게 하는 데 있습니다. 평가를 하는 일차적인 이유는 학습 목표에 학생들이 얼마나 접근했는지 그리고 목표를 도달하려면 어디를 도와주어야 할지 파악하는 데 있습니다.

우리나라는 학교에서 치러지는 수학 과목의 내신 시험도 피드백을 위한 과정이 많이 생략된다. 수능 시험도 아니고 학교에서 정규적인 교육과정에서 치러지는 중간고사와 기말고사 결

과도 수능과 마찬가지로 '상대적인 줄 세우기'에 불과하며, 시험 후에는 피드백 없이 다시 진도를 나가기에 바쁩니다. 교육과정에서 다루는 내용이 많은 탓도 있겠지만 오래도록 학력고사나 수능 시험이 상대평가로 일관해온 문화에서 기인한 탓도 클 것입니다. 실제로 학교에서는 시험 후에 시험 결과에 대한 피드백이 거의 이루어지지 않고 있습니다(학교 내의 수학 평가에 대한 자세한 내용은 Ⅴ장 참고).
수능 시험은 학교 교육과정과 논리적으로 일치, 즉 일관성이 있어야 합니다. 학교 교육내용을 충실히 반영하여야 할 뿐만 아니라, 평가의 원칙은 학생 개개인의 교과 학습 수준을 타당하게 드러내는 데 두어야지, 수험생들의 상대적인 우열을 세밀하게 가르는 데만 두어선 안 됩니다. 수능을 절대평가로 변화시키려는 시도는 이 점에서 합당합니다.

현재 수능 출제에서 상대평가 9등급을 변별력 있게 구분하기 위해서 불가피하게 기형적인 문항들을 출제함에 따라 문항의 타당성에 심각한 문제를 보이고 있습니다. 동점자를 줄이고 4%의 1등급과 7%의 2등급을 구분하는데 몰두하게 하기보다는 교육과정의 정상적인 구현을 위한 타당성 있는 문항출제에 집중할 수 있도록 하기 위해서는 절대평가 체제로의 전환이 불가피합니다.

2. 수학과 교육과정

각국은 수학과 교육과정으로 몸살을 앓고 있습니다. 우리가 본받고자 하던 미국은 국제비교평가 성취도가 높은 동아시아 국가들의 교육과정을 벤치마킹하려고 움직이고 있고, 반면 우리나라는 미국 수학 교육의 장점을 받아들이려 움직이고 있습니다. 소위 '수학 전쟁'이라고 칭해도 될 만큼 치열한 논쟁이 벌어지고 있고, 시시각각으로 변하고 있습니다.
동아시아 국가들의 공통점은 인지적 영역의 성취도가 높은 반면에 정의적 영역의 성취도가 낮게 나타나고 있고, 미국 등 서구 나라는 반대 현상이 벌어지고 있습니다. 각 나라별로 보면 한 마디로 수학과 수학교육의 차이에서 오는 딜레마라 할 수 있습니다. 수학과 수학교육은 서로 다를 수 있습니다. 그래서 서로에 대한 이해의 폭을 넓혀야 합니다. 수학은 학문적 위계가 중요하지만, 위계성은 교육적이지 않습니다. 위계성이 강한 교육과정에서는 한 번 실패한 학생이 회복할 가능성이 적어지므로 냉혹하고 지극히 비교육적입니다. 교육은 도전입니다. 이런 식으로 수학자와 수학교육자들 사이에 밀고 당김을 하는 동안 죽어가는 것은 학생들뿐입니다. 학생들을 위한 배려가 없습니다. 특히 수학자들은 학문적 권위를 내세워 기득권 세력과 같이 그 권위를 지키려고 영향력을 행사하고 있습니다. 교육에 미치는 영향을 생

각해야 하는데, 학생들의 인지 발달이나 정서적인 측면을 고려하는 것이 부족합니다.
사교육걱정은 보통 시민들을 양성하고, 각자 진로에 맞는 수학교육을 지향하면서 현재 수학과 교육과정의 문제점을 지적하고 거기에 대한 제안을 하고자 합니다.

가. 미적분의 지도의 약화

국제적으로 우리나라 수학 교육 내용이 많다는 주장은 모든 고등학생에게 미적분을 강요하는 것 하나만으로도 충분한 설득력이 있습니다. 우리나라는 제7차 교육과정기에만 소위 말하는 문과에서 미적분이 빠졌습니다. 그리고 그 다음 교육과정인 2007 개정 교육과정에서는 제7차보다 20%를 감축했다고 했지만 미적분이 다시 문과로 들어갔기 때문에 감축했다고 보기 어려웠고, 오히려 제7차에서 삭제된 부분이 다시 교육과정 속으로 들어온 것이 미적분 외에도 여러 가지가 있었습니다. 또한 고2 과정에서 순열과 조합이 고1 과정으로, 고1에 있던 평균과 표준편차가 중3으로, 중1에 있던 문자와 식, 방정식 등이 초등학교로 내려가는 등의 역전 현상도 벌어졌습니다. 그래서 20%가 줄었다기보다는 오히려 늘어났다는 주장이 많이 제기되었습니다.
미적분은 이공계로 진학하는 학생들에게 대학 교육과정과의 연계를 위해 필요합니다. 그렇지만 인문사회계나 예체능계로 진학하는 학생들에게는 그 필요성을 인정하기 어렵습니다.
미적분이 수학이라는 학문이나 세계의 역사에서 차지하는 중요함을 이루 말할 수 없습니다. 그러나 그것을 배우는 학생들이나 일반 시민들이 그 중요성을 모른다면 의미 없이 가르치는 것에 대해 제고해야 합니다. 현재 고등학교에서 가르치는 미적분은 다른 수학에 비해 더 중요하다고 말할 여지가 없습니다. 오히려 가르쳐야 할 이유를 찾기가 더 어렵습니다.
수학교육이 수학 내용 지식에 대한 학습과 더불어 수학적 사고를 키울 수 있을 때 그 교육적 의미가 보다 크다는 것을 부인할 수 없을 것입니다. 현재 고등학교의 미적분은 내용 지식에 대한 학습은 가능하지만 수학적 사고를 유발한다고 보기 어렵습니다. 그렇기 때문에 교사들도 미적분을 가르쳐야 할 이유를 찾지 못하고 있고, 학생들은 배워야 할 이유를 모른 채 문제만 풀고 있는 것입니다.
그 결과 미적분은 일반 시민들에게 수학을 어려워하고 싫어하게 만들었습니다. 미적분이 아니더라도 수학이 중요하고 필요함을 잘 가르칠 수 있는 수학 내용 지식은 얼마든지 있습니다. 미적분이 경상계에 필요하다는 것도 2000년대 초반 제7차 교육과정 시행 초기에 잠깐 논란이 된 적이 있었지만 한두 명의 경제학자의 주장에 전 수학계가 나서서 동조할 필요는 없으며 이미 경상계는 미적분을 모르는 학생들에게 대학에서 한두 달 동안 미적분을 지도하여 전공 공부에 지장이 없도록 하고 있습니다. 만약 경상계에 미적분이 꼭 필요하다면 2015

개정 교육과정에서 새롭게 신설되는 '경제 수학' 과목을 이수하게 하면 될 것입니다. 그러므로 경상계로 진학하지 않는 나머지 학생들을 위한 수학에서는 굳이 미적분을 중복하여 이수할 필요는 없습니다.

미적분Ⅱ는 대학의 교육과정으로 올려야 합니다. 그 이유로 두 가지를 들 수 있습니다. 첫째, 사실 미적분Ⅱ는 다음 [그림 Ⅲ-5]에서 보는 바대로 대학의 이공계 교양과정인 미분적분학과 그 내용이 일치합니다. 즉 대학 교육과정과 중복되는 부분입니다. 똑같은 내용을 중복해서 가르치는 것은 시간상 여유가 있을 때는 가능하지만 굳이 무리를 해서 가르칠 필요는 없을 것입니다.

[그림 Ⅲ-5] 고등학교 수학 교육과정과 대학 이공계 교육과정 비교 그림

둘째, 내용이 너무 어렵습니다. 솔직히 말해서 고등학교 교사 중 미적분Ⅱ의 내용을 정확히 이해하고 학생들에게 충분하게 설명할 수 있는 교사는 10%를 넘지 않을 것입니다. 교사들도 이해하기가 쉽지 않은 내용을 학생들에게 가르치고 시험까지 보라고 하는 것은 무리가 아닐 수 없습니다. 이것은 대학의 학점을 선이수하는 개념으로 가르치는 미국의 AP 제도라든가

시험은 보더라도 계산기 등을 이용해서 간단하게 결과를 확인하는 시험인 영국의 A-level 시험과 우리나라 고등학교 정규 교육과정인 미적분Ⅱ를 비교하는 것은 제대로 된 비교라고 보기 어렵습니다.
중복되는 문제와 너무나 어려운 내용으로 구성된 미적분Ⅱ는 대학에 가서 학문적으로 필요한 학생들만 공부하도록 하는 것이 교육적일 것입니다.

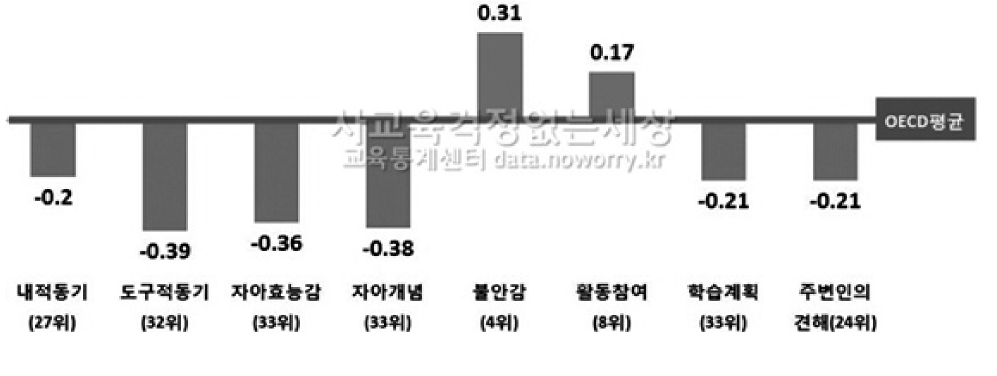
나. 정의적 영역의 성취도 향상시켜야

교육부의 제2차 수학교육 종합 계획이 2015년 3월 16일에 발표되었습니다. 이번 종합 계획은 2012년 1월부터 제1차 수학교육 선진화 방안을 3년간 추진했음에도 불구하고 학생들의 과목 흥미도 및 자신감이 저조하여, 이를 중점적으로 개선할 필요성이 제기되고 있다고 판단했으며, 앞으로 5년간 “배움을 즐기는 수학교육”의 달성을 목표로 잡고 있습니다. 전적으로 동감합니다.

1) 낮은 흥미도와 자아 효능감

우리나라 학생들의 수학 학습 동기(흥미도)와 자아 신념(자신감)이 저조한 것은 PISA 등 국제비교평가에서도 지속적으로 나타나고 있습니다. 다음 [그림 Ⅲ-6]은 가장 최근에 발표된 PISA 2012 평가 결과 정의적 특성의 성취도를 나타내고 있습니다.

[그림 Ⅲ-6] 우리나라 학생들의 정의적 특성에 대한 국제적 순위

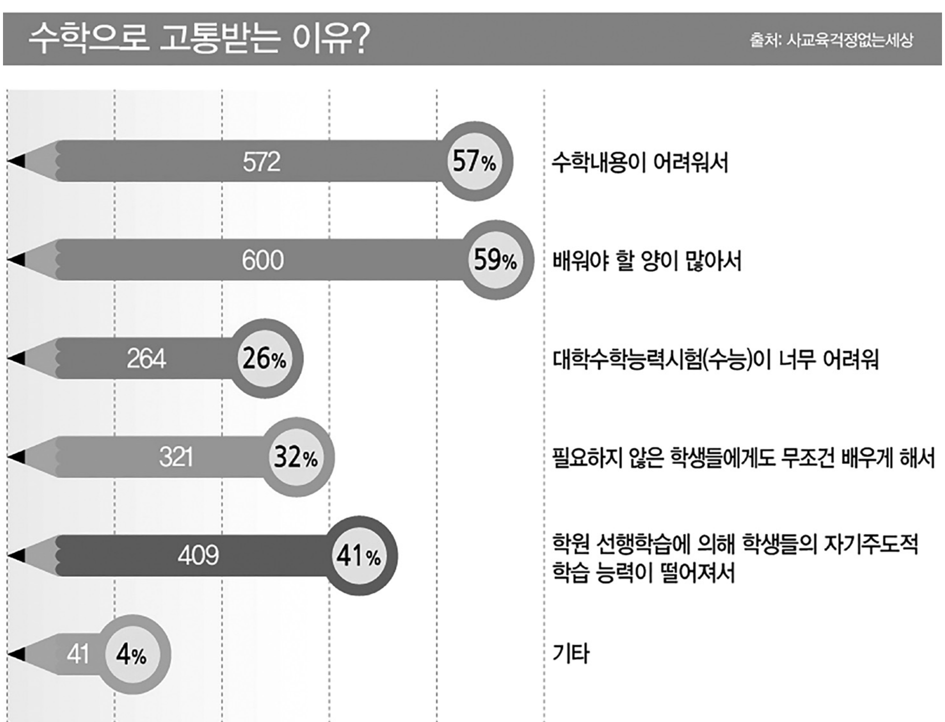


학생들의 수학에 대한 정의적 영역의 성취는 학생 개인의 입장뿐만 아니라 국가적인 입장에서도 중요한 의미를 가집니다. 학생들의 수학 교과에 대한 부정적인 인식은 학생 개개인의

인지적인 성취뿐만 아니라 결국 수학이나 과학과 같은 국가 경쟁력의 발전에 토대가 되는 기초 학문 분야의 발전을 저해하는 원인이 될 수 있으므로, 학생들의 정의적 특성은 국가적인 측면에서도 중요한 의미를 갖는다고 볼 수 있습니다.
그래서 PISA의 연구에서도 정의적 영역을 포함하고 있는 것입니다. 정의적 영역은 학생들이 학습에 흥미를 가지고 자발적으로 학습에 대한 동기를 부여하며, 학습에 대한 자신감을 가지게 하는 심리적 요인으로 교육의 효과, 즉 성취도를 높이는데 크게 기여한다는 것을 인정하기 때문입니다.

2014년 4월 세계일보가 전국의 초 · 중 · 고등학생 1433명에게 설문조사한 결과 보도에 의하면 수학이 재미없다는 학생들은 그 이유(복수응답)로 ‘어려워서’(50.4%)를 가장 많이 꼽았고, ‘공부할 양이 많아서’(28.5%)와 ‘성적이 안 올라서’(21.0%), ‘필요성을 못 느껴서’(15.9%)라는 응답도 많았습니다. 이런 경향은 사교육걱정없는세상(이하 ‘사교육걱정’)에서 2013년 7월에 실시한 [그림 Ⅲ-7]의 수학 교과에 대한 국민 의식조사에서도 나타나고 있습니다(응답자 1,009명).

[그림 Ⅲ-7] 수학 교과에 대한 국민 의식조사 결과



2) 2009 개정 교육과정과 제2차 수학교육 종합 계획에서의 정의적 영역

정의적 영역에 대한 강조점은 이번 2015 개정 교육과정의 개정 방향이 아니라 이미 2009 또는 이전의 교육과정에서 계속 강조한 부분이며, 제2차 수학교육 종합 계획에서도 거듭 강조하고 있습니다. 그리고 강조점 또한 일치합니다.
다음 〈표 Ⅲ-8〉은 지금 실행 중인 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 교수 · 학습 방법과 제2차 수학교육 종합 계획에서 이와 관련된 부분만 발췌해서 비교한 것입니다(... 표시는 중략된 부분을 나타냅니다).

〈표 Ⅲ-8〉 2009 개정 교육과정과 제2차 수학교육 종합 계획의 교수 · 학습 방법 비교표

2009 개정 교육과정	제2차 수학교육 종합 계획
라. 수학과 수업에서는... 발견 학습, 탐구 학습, 협동 학습, 개별 학습... 마. 수학의 개념, 원리, 법칙, 기능의 교수 · 학습에서는 다음 사항에 유의한다. (1) 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상을... (2) 구체적 조작 활동과 탐구 활동을 통하여 학생 스스로... 아. 수학적 문제 해결력을 신장시키기 위하여... (3) 문제 해결의 결과뿐만 아니라 문제 해결 방법과 과정, 문제를 만들어 보는 활동도 중시한다. 자. 수학적 추론 능력을 신장시키기... (1) 귀납, 유추 등을 통해 학생 스스로 수학적 사실을 추측하고, 이를 정당화할 수 있게 한다. (2) 수학적 사실이나 명제를..., 학생 자신의 사고 과정을 반성하게 한다. (3) 수학적 추론을 통해..., 일상생활에서 자신의 의견을 정당화할 때 적절한 근거에 기초하여 논지를 전개할 수 있게 한다. 차. 수학적 의사소통 능력을 신장시키기... (2) 수학적 아이디어를 말과 글로 설명하거나 시각적으로 표현하여... (3) 수학적 아이디어를 표현하고 토론하며 다른 사람의...	쉽고 재미있는 수학 교육 추진 ㅇ 수학에 대한 긍정적 태도와 정의(情意)적 특성을 함양할 수 있도록 교육과정 내용 구성 – 문제풀이식이 아닌 원리와 개념을 익히는 과정 중심의 교수 학습방법과 평가 방법 마련 ㅇ 수학의 유용성을 체감할 수 있는 실생활 연관 내용 강화 – 문제풀이 위주가 아닌 실생활 속에서 수학의 유용성을 체감할 수 있는 내용 위주로 수학교과서 개발 유도 수학 관련 도서를 활용한 수학독서, 독후감쓰기 등을 통해 수학에 대한 긍정적 태도 함양과 정의적 영역의 성취를 향상시킨다. 현장 중심 수학교육 프로그램 개발 – 학생의 흥미, 경험, 수준, 요구 등 학생의 개별적 적성과 특성을 고려한 수학기반 융합교육 콘텐츠 개발 · 보급 공학적 도구 활용 지원 ㅇ 수학 교과별, 교과내용별, 수학수업과 동아리 활동 등 체험 · 탐구 중심 수학수업을 위한 교구, SW 및 첨단 IT 활용 지원 – 수학수업에 도입 가능한 첨단IT 및 SW의 개발 보급을 위해 정부의 다양한 재원 확보 노력, 기업 교육기부 활용 등 외부 인프라 활용

파. 수학 교수 · 학습 과정에서... (2) ... 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구와 다양한 교구를 활용한다. 하. 수학 학습 시... 학습 결과를 스스로 평가하는 자기 주도적 학습 능력을 신장시킨다.	– 공학적 도구 활용 지원을 위한 관련 정보, 사용 방법 등 안내 제공

제2차 수학교육 종합 계획에서 강조한 것이 “창의적 인재를 양성하며 배움을 즐기는 수학교육”이며, 각계 인사들로 구성된 수학교육자문위원회의 의견을 수렴하여 마련되었다고 했는데, 그 내용 중 상당수가 이미 강조하고 있었던 내용이라는 점은 놀랍습니다. 이것은 그동안 우리나라 각 시도교육청과 각급 학교가 교육부 장관이 고시한 교육과정을 내용만 지켰지 교수 · 학습 방법에 대해서는 전혀 지키고 있지 않았다는 것을 뜻합니다. 초중등교육법을 지키지 않았다는 것입니다.

3) 정의적 영역 성취를 높이려면 학습 내용 경감되어야

정의적 영역의 성취를 높이려면 우선 수업이 바뀌어야 합니다. 현재 교육과정의 학습 내용과 그것을 구현하고 있는 교과서는 정의적 영역의 성취를 높이기에는 무리가 많습니다. 수업에서 발견학습, 탐구학습, 협동학습 등이 이루어지려면 매 시간에 소화할 수 있는 학습 내용이 줄어야 합니다. 내용은 크게 경감하지 않은 상태로는 수업을 바꿀 수가 없습니다. 지금보다 20% 이상 줄어야만 교사들에게 수업에 변화를 요구할 수 있습니다.

다. 지식중심 교육에서 사고력중심 교육으로 전환

우리나라의 교육과정의 성취 기준(학습 목표)은 내용 영역을 중심으로 제시하고 있습니다. 내용 영역이라는 것은 주로 지식 중심입니다. 우리나라 초등학교 수학의 경우 수와 연산, 도형, 측정, 확률과 통계, 규칙성의 5개 영역별로 성취 기준이 제시되어 있습니다. 중학교 수학은 수와 연산, 문자와 식, 함수, 기하, 확률과 통계의 5개 영역별로 성취 기준이 제시되어 있습니다. 무엇을 배우는지에 대해서 주로 설명하고 있습니다.

하지만 외국의 경우 지식만을 강조하고 가르치는 것이 아니라 사고 과정도 중시여기는 것을 확인할 수 있습니다. 여기서는 미국과 영국, 독일, 핀란드의 경우를 살펴보도록 하겠습니다.

1) 사고 과정을 중시하는 외국 사례

가) 미국의 실천 원리(Mathematical Practices, MP)
2000년에 발표된 미국의 교육과정(Standards)에는 우리나라와 같은 5개의 내용 영역과 더불어 별도로 5개의 과정 영역이 있었습니다(〈표 Ⅲ-9〉). 과정 영역은 별도로 단원으로 독립되어 구성되기보다는 내용 영역과 더불어 통합적으로 구성하여 자연스럽게 수학교육의 전반에 과정 중심의 사고가 흐르도록 교과서를 구성하였습니다.

〈표 Ⅲ-9〉 미국 교육과정의 내용 영역과 과정 영역(Standards, 2000)

내용 영역	과정 영역
수와 연산	문제해결
대수	추론과 증명
기하	의사소통
측정	연결성
자료 분석과 확률	표현

2010년에 나온 공통핵심교육과정(Common Core State Standards)에는 다음과 같은 8개의 실천 원리가 있습니다.

MP1. 문제를 이해하고 그것을 해결하는 데 인내심을 가져라.
MP2. 추상적으로 그리고 양적으로 추론하라.
MP3. 논리 있게 주장을 구성하고 다른 사람의 추론을 비판하라.
MP4. 수학적 모델을 만들어라.
MP5. 적절한 도구를 전략적으로 사용하라.
MP6. 정확성에 주의를 기울여라.
MP7. 구조를 찾고 이용하라.
MP8. 반복되는 추론에서 규칙을 찾고 표현하라.

공통핵심교육과정에 의한 교과서들이 최근 미국에서 출판되고 있습니다. 교과서를 보면 이 실천 원리를 교과서 서두에 두 쪽을 할애하여 제시하면서 강조하고 있습니다. 그리고 매 주제마다 학습을 마친 후에 반드시 이 실천 원리들을 어떻게 사용했는지를 반성하게 하고 토론

하게 합니다. 각 주제마다 가장 유용한 실천 원리가 무엇이었는지를 되돌아보게 하는 것은 내용 영역보다 실천 원리가 중요함을 거듭 강조하는 신호라고 볼 수 있습니다.

나) 영국의 수학적 작업(Working mathematically)

영국에서는 Key Stage 3(중학교)부터 내용 영역 외에 수학적 작업(Working mathematically)이라는 영역이 추가됩니다. 이것은 수학 내용을 가르칠 때 반드시 가르쳐져야 할 것으로 규정하고 있으며, 〈표 Ⅲ-10〉에서 보는 바대로 유창성 개발, 수학적 추론, 문제해결, 이 세 가지를 명시하고 있습니다.

〈표 Ⅲ-10〉 영국 교육과정의 수학적 작업 영역

영역	
유창성 개발	• Key Stage 2에서 나온 자신의 수치와 수학 능력을 통합하고, 소수, 분수, 거듭제곱과 제곱근을 포함하는 수 체계와 자릿값에 대한 이해를 확장하기 • 점점 복잡해지는 문제를 해결하기 위해 적절한 연산 전략을 선택하고 사용하기 • 수학적 관계를 공식화하는 것을 포함한 연산의 구조를 일반화하기 위해 대수를 이용하기 • 식의 값을 구하고, 식을 재배열 및 간소화하고, 방정식을 풀기 • 다양한 수식, 대수, 그래픽 및 도식적 표현 사이에서 자유롭게 변환하기 [예, 동치 분수, 분수와 소수, 그리고 방정식과 그래프] • 일차함수 및 간단한 이차 함수에 대한 이해를 포함하여, 대수적 및 기하학적 유창 개발하기 • 수, 대수식, 2-D 및 3-D 도형, 확률과 통계를 분석하기 위해 용어와 성질을 정확하기 사용하기
수학적 추론	• 수 체계의 이해를 확장하기; 수 관계와 그 대수적이고 기하학적 표현 사이를 연결하기 • 측정과 기하를 학습하고, 비례 관계를 대수적으로 형식화하는 데, 비와 비율에 대한 지식을 확장하고 공식화하기 • 변수를 식별하고 대수적이고 기하학적인 변수 사이의 관계를 표현하기 • 패턴과 관계에 대한 추측을 만들고 검증하기; 증명하거나 반례를 찾기 • 기하학적 구조를 사용하는 것을 포함하여, 도형, 수와 대수에서 연역적인 추론을 시작하기 • 계산 문제의 구조가 덧셈, 곱셈 또는 비례 추론을 필요로 할 때 해석하기 • 통계적인 또는 확률적인 상황에서 유추할 수 있는지 없는지를 탐구하고, 자신의 주장을 형식적으로 표현하는 것을 시작하기
문제해결	• 다단계 문제를 포함하여, 문제를 해결하고 결과를 평가하는 것을 통해 자신의 수학적 지식을 개발하기 • 금융 수학을 포함하여, 문제를 해석하고 해결하기 위해 형식적 수학 지식의 사용을 개발하기 • 수학의 다양한 형식적 표현을 사용하여 상황을 수학적으로 모델링하고 결과를 표현하는 것을 시작하기 • 낯설고 일상적이지 않은 문제에 적용할 적절한 개념, 방법 및 기술을 선택하기

교사들은 단순히 수학 내용만 가르치는 것이 아니라 수학적 작업을 중심으로 수학 내용을 재구성해서 가르쳐야 합니다. 이때 학생들은 수학 내용보다는 수학적 작업, 즉 유창성 개발, 수학적 추론, 문제해결을 통해서 수학의 유용성을 인식하게 됩니다.

다) 독일의 과정 역량(Process-related Competency)
독일의 수학과 교육과정에서 나타나는 한 가지 특징은, 수학과에서 다루어야 하는 지식의 목록만을 제시하는 것이 아니라, 이와 함께 지식을 습득하는 과정에서, 혹은 습득한 결과 보여주어야 하는 기능(skill)도 함께 제시함으로써 지식과 기능의 통합을 추구한다는 것입니다. 이들의 교육과정에서 지식은 주로 '내용'과 관련된 항목에서 제시되고, 기능은 주로 '과정'과 관련된 항목에서 제시됩니다. 즉 교육과정에서 '내용'과 함께 교과를 학습하는 '과정'에서 어떠한 방법적 원리들이 활용되어야 하는지에 대한 설명을 제시하고 있는 것입니다(소경희 외, 2013).

〈표 Ⅲ-11〉 독일 교육과정의 내용 역량과 과정 역량

내용 역량 (Content-related Competency)	과정 역량 (Process-related Competency)
연산 및 조작활동 수량 및 측정 공간 및 형태 자료 빈도 및 확률	문제해결 및 논의 의사소통 모델링

독일의 교육과정에서는 과정 역량을 그저 선언적으로 포함시킨 것이 아니라, 수학 교과를 통해 획득해야 할 역량을 체계화한 후에, 역량을 습득한 결과 학생들이 보여주어야 하는 성취 수준을 세분화하여 제시한다는 점입니다. 학생들은 이러한 세분화된 성취 수준에서 일정 수준 이상을 반드시 성취하리라 기대됩니다. 이처럼 역량별 성취 수준을 국가 혹은 주 수준의 교육과정 문서를 통해 제시함으로써, 수업의 초점을 교사가 가르치는 것 그 자체가 아니라, 수업의 결과로 학생들이 학습하게 된 것에 두어야 함을 요구합니다.

라) 핀란드의 사고 기능과 방법
핀란드는 수학 내용보다는 학습 활동 중심으로 제시하였습니다. 특히, 주목할 만한 점은 집중하기, 관찰하는 습관 기르기, 문제를 스스로 해결함으로써 안정감과 만족감 느끼기, 수학 학습에 대해서 자신을 신뢰하고 책임감 갖기, 끈기 있는 태도 기르기, 자신의 행동과 결론을 정당화하기, 의사소통 능력 기르기 등 수학적 성향과 수학적 과정에 대해 구체적으로 목표를 제시하여 우리나라의 교육과정과 비교했을 때 핀란드의 교육과정이 수학적 성향이나

수학적 과정에 대한 강제성이 높다고 할 수 있습니다. 이것으로 미루어 TIMSS/PISA의 평가에서 핀란드가 정의적 영역에서도 상위권을 유지할 수 있었음을 짐작할 수 있습니다(문지혜, 2013).
영역별 주요 내용에서 주목할 점은 6-9학년에 사고 기능과 방법이라는 내용 영역이 설정되어 있다는 것으로 '사고 기능과 방법'은 수학 내용 요소를 교육적으로 구현하는 방법이나 학생들이 수학 학습을 통해 갖추기를 요구하는 수학적 능력과 관련된 것을 〈표 Ⅲ-12〉와 같이 진술하고 있습니다.

〈표 Ⅲ-12〉 핀란드 교육과정의 사고 기능과 방법

영 역	내 용
사고 기능과 방법	• 분류, 비교, 조직, 측정, 구성, 모델링, 규칙이나 상호 관계를 찾고 표현하기와 같은 논리적 사고를 요구하는 기능 • 비교하고 상호 관계를 이해하는 데 필요한 개념을 해석하고 사용하기 • 수학적 문장을 해석하고 만들기 • 증명의 도입: 정당화된 가설이나 실험, 체계적인 시행착오 방법, 부정확성을 정당화하기, 직접 증명 등 • 다른 방법을 사용하여 조합 문제를 해결하기 • 사고를 뒷받침할 도구나 그림의 사용 • 수학사

2) 수학적 과정(핵심 역량)이 교육과정 내용 영역과 통합되어야

수학교육은 수학과의 전공 교육이 아닙니다. 또한 대학의 수학과를 진학하기 위한 교육도 아닙니다. 따라서 수학과의 전공 내용을 지식 중심으로 가르치는 것이 아니라 수학적 사고력을 키우는 것이 목적입니다. 수학 지식은 수학적 사고력을 키우기 위한 수단으로만 사용되어야 합니다. 이공계 대학 진학에 직접적으로 필요한 수학이 있다면 고등학교 정도에서 가르치는 것은 필요하지만, 중학교까지의 교육에서 수학 지식을 가르칠 필요는 전혀 없습니다. 오히려 수학적 사고력을 키워내면 수학 공부는 저절로 해낼 수 있는 그런 교육이 필요합니다.
우리나라 2015 개정 수학과 교육과정 초안에는 복잡하고 전문화되어가는 미래 사회를 대비하기 위해 수학과에서 길러야 할 핵심 역량으로 문제 해결 능력, 의사소통 능력, 추론 능력, 창의적 사고 능력, 정보처리 능력을 강조하고 있습니다. 핵심 역량은 비단 2015 개정 교육과정에서 처음 나온 것은 아니고 2009 개정 교육과정에서도 강조한 사항입니다. 다만, 핵심 역량 또는 수학적 과정이 교육과정의 서두에 나오는 성격 부분에만 선언적으로 포함되어 있어서 학교 수업과 평가에 직접적인 연관성이 있는 내용 영역에 큰 영향을 주지 못하고 있다는 점이 문제입니다.

외국 몇 나라의 사례에서 보았듯이, 교육과정의 내용 영역에 명시적으로 이런 부분들이 없는 것은 아직 우리나라 수학교육이 학생들의 수학적 사고력을 키우지 못하고 있다는 증거로 해석할 수 있습니다. 이번에 개정되는 2015 교육과정에서는 이 부분이 내용 영역과 직접적인 관계를 맺게 해야 합니다. 핵심 역량을 길러야 한다는 것이 교육과정 내용 영역과 통합되지 않으니 가르치지도 않고 평가를 하지도 않게 됩니다. 교과서를 구성할 때 별도의 단원으로 독립시키는 것보다 내용 영역과 통합되도록 해야 합니다.

라. 단선형 교육과정에서 나선형 교육과정으로 전환

1) 세계적으로 짧은 한 주제 취급 시간

우리나라 수학과 교육과정은 제6차 교육과정 이래 지속적으로 학습량 또는 학습 부담 감축을 모토로 걸어왔습니다. 그래서 학습량 또는 학습 부담을 감축하라는 총론적인 지침에 부합하는 연구 결과를 만들어내는 한 방법으로 내용을 줄이기보다는 여러 학년에 걸쳐서 가르치던 것을 한 번에 가르치고 끝내는 방식으로 감축시키는 현상이 벌어져 왔습니다. 이번 교육과정 국제비교에서도 이런 현상을 많이 발견할 수 있었습니다.

교육과정 비교에서 나타나는 이러한 현상은 여러 나라와의 교과서 비교 분석에 대한 연구에서도 유사한 결과를 보이고 있습니다. 예를 들면, 한국과 일본, 미국, 영국의 교과서 비교 연구에서, 한국의 교과서는 미국이나 영국의 교과서에 비해 각 내용영역이 대부분 한 학년에 한 번씩 배치되는 선형적인 구조를 가지고 있습니다. 반면에, 미국과 영국의 교과서는 한 단원이나 모듈 안에 여러 개의 이질적인 내용 영역이 혼합되어 하나의 내용 영역이 여러 단원이나 모듈에 반복적으로 배치되는 순환적 구조를 이루고 있음을 알 수 있습니다(박경미, 임재훈, 2002).

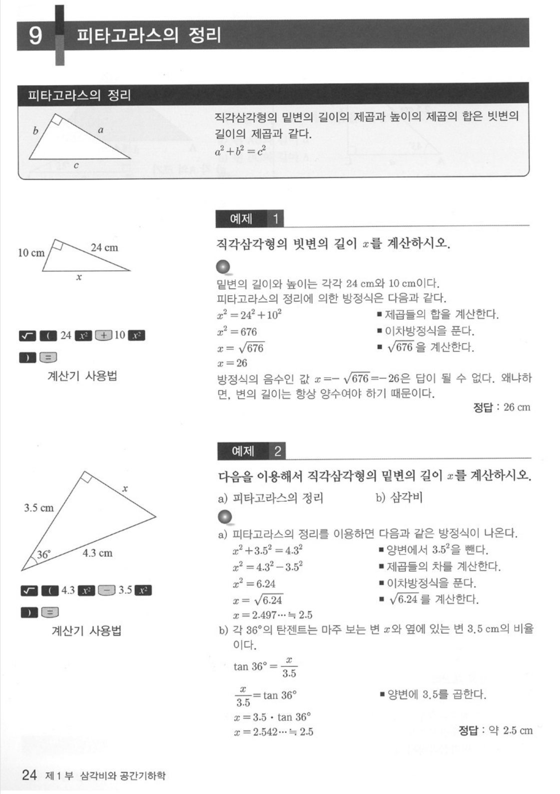
미국(캘리포니아 주)과 우리나라의 수학 교육과정에 제시된 주제들을 비교할 때 전반적으로 가장 크게 드러나는 특징은 우리나라가 미국에 비해 더 많은 주제를 더 깊은 수준까지 다루고 있다는 것입니다. 또한, 미국에서는 여러 가지 주제들이 우리나라보다 더 일찍 도입되어 여러 학년에 걸쳐 반복적으로, 점진적으로 심도를 깊게 하면서 진행됩니다. 다시 말해서, 우리나라는 어떤 하나의 주제를 한 학년에서 도입하여 그 학년에서 완성시키는 경향이 있는 반면, 미국에서는 하나의 주제를 한 학년에서 도입한 후 그 다음의 여러 학년에서 반복해서 다루면서 심화시키는 경향이 있습니다. 이러한 경향은 어떤 한 주제를 완성하는 속도에 있어서 우리나라가 미국보다 훨씬 빠른 속도로 다가가서 빠른 시간 내에 완결한다는 것을 의미합니다.

이러한 결과는 Schmidt 외(1997)가 쓴 TIMSS(Third International Mathematics and Science Study) 1995 보고서의 학습 주제 취급 기간의 지속성을 조사한 자료에서도 나타납니다. 주제의 지속 기간에 대한 자료는 국가별로 각 학습 주제가 도입된 학년 수를 근거로 국가별 평균 지속 기간을 산출한 후에 중앙값을 구했는데, 어떤 한 주제에 대하여 취급하는 시간이 참가국의 평균 지속 시간에 대한 중앙값보다 우리나라는 1년 짧았으며, 미국은 1.7년 길게 나타났습니다. 미국과 우리나라의 차이는 2.7년으로 약 3배 차이가 납니다.

피타고라스 정리와 관련하여, 우리나라에서는 피타고라스 정리의 증명과 활용을 9학년에서 다루지만, 미국에서는 피타고라스 정리의 이해, 직접 측정에 의한 확인과 활용은 7학년에서, 그 증명과 활용은 9학년의 Geometry에서 다루고 있습니다(임재훈 외, 2004).

핀란드에서도 한 주제를 여러 학년에서 학습합니다. 예를 들면 다항식의 곱셈을 8학년에서는 분배법칙만으로 해결하고, 9학년에서 연립방정식 배우기 직전에 다시 학습합니다. 그리고 고등학교 2권[6]에서 비로소 공식으로 취급합니다. 반면 우리나라는 중학교 2학년과 고등학교 1학년에서 다루지만 서로 다른 내용을 다룰 뿐 수학적 아이디어나 지도 방식은 똑같습니다.

[그림 Ⅲ-8] 핀란드 8학년과 9학년의 피타고라스 정리


9 피타고라스의 정리

피타고라스의 정리

직각삼각형의 밑변의 길이의 제곱과 높이의 제곱의 합은 빗변의 길이의 제곱과 같다.
$a^2+b^2=c^2$

예제 1

직각삼각형의 빗변의 길이 x를 계산하시오.

밑변의 길이와 높이는 각각 24 cm와 10 cm이다.
피타고라스의 정리에 의한 방정식은 다음과 같다.
$x^2=24^2+10^2$ ■ 제곱들의 합을 계산한다.
$x^2=676$ ■ 이차방정식을 푼다.
$x=\sqrt{676}$ ■ $\sqrt{676}$을 계산한다.
$x=26$
방정식의 음수인 값 $x=-\sqrt{676}=-26$은 답이 될 수 없다. 왜냐하면, 변의 길이는 항상 양수여야 하기 때문이다.

정답 : 26 cm

계산기 사용법

예제 2

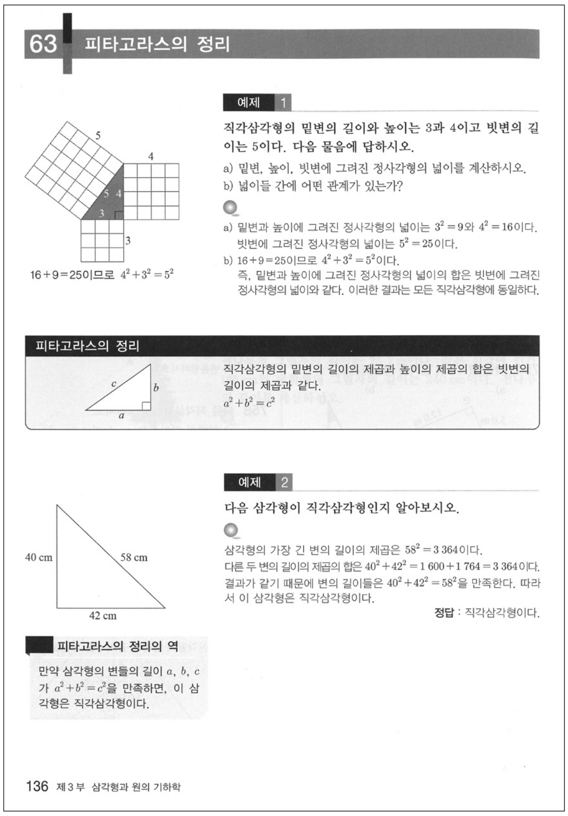
다음을 이용해서 직각삼각형의 밑변의 길이 x를 계산하시오.
a) 피타고라스의 정리 b) 삼각비

a) 피타고라스의 정리를 이용하면 다음과 같은 방정식이 나온다.
$x^2+3.5^2=4.3^2$ ■ 양변에서 3.5^2을 뺀다.
$x^2=4.3^2-3.5^2$ ■ 제곱들의 차를 계산한다.
$x^2=6.24$ ■ 이차방정식을 푼다.
$x=\sqrt{6.24}$ ■ $\sqrt{6.24}$를 계산한다.
$x=2.497\cdots \fallingdotseq 2.5$
b) 각 36°의 탄젠트는 마주 보는 변 x와 옆에 있는 변 3.5 cm의 비율이다.
$\tan 36° = \frac{x}{3.5}$
$\frac{x}{3.5} = \tan 36°$ ■ 양변에 3.5를 곱한다.
$x=3.5 \cdot \tan 36°$
$x=2.542\cdots \fallingdotseq 2.5$

정답 : 약 2.5 cm

계산기 사용법

24 제 1 부 삼각비와 공간기하학


63 피타고라스의 정리

예제 1

직각삼각형의 밑변의 길이와 높이는 3과 4이고 빗변의 길이는 5이다. 다음 물음에 답하시오.
a) 밑변, 높이, 빗변에 그려진 정사각형의 넓이를 계산하시오.
b) 넓이들 간에 어떤 관계가 있는가?

a) 밑변과 높이에 그려진 정사각형의 넓이는 $3^2=9$와 $4^2=16$이다.
빗변에 그려진 정사각형의 넓이는 $5^2=25$이다.
b) $16+9=25$이므로 $4^2+3^2=5^2$이다.
즉, 밑변과 높이에 그려진 정사각형의 넓이의 합은 빗변에 그려진 정사각형의 넓이와 같다. 이러한 결과는 모든 직각삼각형에 동일하다.

16+9=25이므로 $4^2+3^2=5^2$

피타고라스의 정리

직각삼각형의 밑변의 길이의 제곱과 높이의 제곱의 합은 빗변의 길이의 제곱과 같다.
$a^2+b^2=c^2$

예제 2

다음 삼각형이 직각삼각형인지 알아보시오.

삼각형의 가장 긴 변의 길이의 제곱은 $58^2=3\,364$이다.
다른 두 변의 길이의 제곱의 합은 $40^2+42^2=1\,600+1\,764=3\,364$이다.
결과가 같기 때문에 변의 길이들은 $40^2+42^2=58^2$을 만족한다. 따라서 이 삼각형은 직각삼각형이다.

정답 : 직각삼각형이다.

피타고라스의 정리의 역

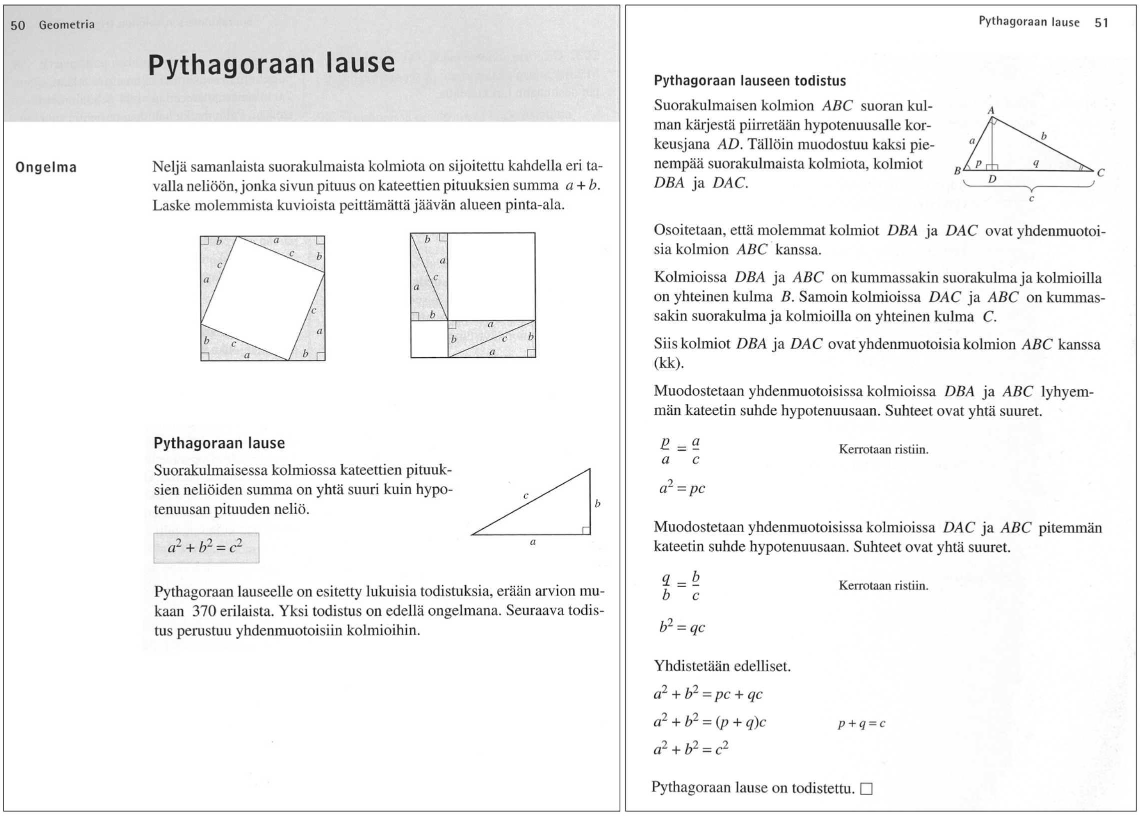
만약 삼각형의 변들의 길이 a, b, c가 $a^2+b^2=c^2$을 만족하면, 이 삼각형은 직각삼각형이다.

136 제 3 부 삼각형과 원의 기하학

6) 핀란드 일반 인문계 고등학교 수학 교과서는 1권부터 10권까지 내용별로 나뉘어져 있다. 2권은 다항함수에 관한 책이다.

[그림 Ⅲ-8]과 같이 피타고라스의 정리는 8학년에서 증명 없이 정리를 제시하고 여러 가지 문제를 해결합니다. 9학년에서도 직각삼각형의 변의 길이를 구하는 문제를 취급합니다.

[그림 Ⅲ-9] 피타고라스 정리의 논리적 증명(핀란드 고교 3권 교과서)



50 Geometria

Pythagoraan lause

Ongelma Neljä samanlaista suorakulmaista kolmiota on sijoitettu kahdella eri tavalla neliöön, jonka sivun pituus on kateettien pituuksien summa $a + b$. Laske molemmista kuvioista peittämättä jäävän alueen pinta-ala.

Pythagoraan lause

Suorakulmaisessa kolmiossa kateettien pituuksien neliöiden summa on yhtä suuri kuin hypotenuusan pituuden neliö.

$a^2 + b^2 = c^2$

Pythagoraan lauseelle on esitetty lukuisia todistuksia, erään arvion mukaan 370 erilaista. Yksi todistus on edellä ongelmana. Seuraava todistus perustuu yhdenmuotoisiin kolmioihin.

Pythagoraan lause 51

Pythagoraan lauseen todistus

Suorakulmaisen kolmion ABC suoran kulman kärjestä piirretään hypotenuusalle korkeusjana AD. Tällöin muodostuu kaksi pienempää suorakulmaista kolmiota, kolmiot DBA ja DAC.

Osoitetaan, että molemmat kolmiot DBA ja DAC ovat yhdenmuotoisia kolmion ABC kanssa.

Kolmioissa DBA ja ABC on kummassakin suorakulma ja kolmioilla on yhteinen kulma B. Samoin kolmioissa DAC ja ABC on kummassakin suorakulma ja kolmioilla on yhteinen kulma C.

Siis kolmiot DBA ja DAC ovat yhdenmuotoisia kolmion ABC kanssa (kk).

Muodostetaan yhdenmuotoisissa kolmioissa DBA ja ABC lyhyemmän kateetin suhde hypotenuusaan. Suhteet ovat yhtä suuret.

$\frac{p}{a} = \frac{a}{c}$ Kerrotaan ristiin.

$a^2 = pc$

Muodostetaan yhdenmuotoisissa kolmioissa DAC ja ABC pitemmän kateetin suhde hypotenuusaan. Suhteet ovat yhtä suuret.

$\frac{q}{b} = \frac{b}{c}$ Kerrotaan ristiin.

$b^2 = qc$

Yhdistetään edelliset.

$a^2 + b^2 = pc + qc$

$a^2 + b^2 = (p + q)c$ $\quad p + q = c$

$a^2 + b^2 = c^2$

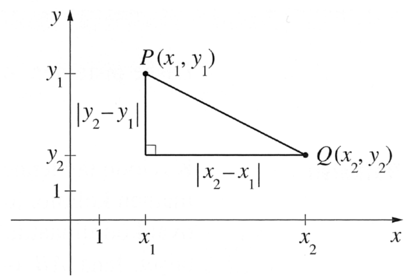
Pythagoraan lause on todistettu. □

[그림 Ⅲ-9]와 같은 피타고라스의 논리적 증명은 고교 3권에서 합니다.

[그림 Ⅲ-10] 피타고라스 정리의 활용(핀란드 고교 4권 교과서)

30 Analyyttinen geometria

x-akselin suuntaisen kateetin pituus on pisteiden P ja Q x-koordinaattien erotuksen itseisarvo $|x_2 - x_1|$.
y-akselin suuntaisen kateetin pituus on pisteiden y-koordinaattien erotuksen itseisarvo $|y_2 - y_1|$.



Saadaan:

$|PQ|^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$ — Käytetään lukujen ominaisuutta $|a|^2 = a^2$. Ominaisuus pätee, koska luvun itseisarvo on joko luku itse tai luvun vastaluku, ja vastaluvun neliö on yhtä suuri kuin luvun neliö.

$|PQ|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ — Pisteiden P ja Q etäisyyden neliö on x-koordinaattien erotuksen ja y-koordinaattien erotuksen neliöiden summa.

$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ — Pisteiden P ja Q etäisyys.

Kahden pisteen etäisyys tasossa

Pisteiden $P(x_1, y_1)$ ja $Q(x_2, y_2)$ etäisyys (pisteitä yhdistävän janan pituus) on $|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

고교 4권에서는 [그림 Ⅲ-10]과 같이 좌표평면에서 두 점 사이의 거리를 구하는 문제를 다룹니다. 피타고라스 정리의 활용 문제입니다. 핀란드 중학교 8학년과 9학년, 그리고 고등학교 3권과 4권에 걸쳐서 반복적으로 배우는 이 모든 과정을 반면 우리나라는 중학교 3학년에서 한 번에 가르치고 끝냅니다.

이러한 특징은 제3차 수학·과학 성취도 국제비교연구인 TIMSS(Third International Mathematics and Science Study)에서 분석한 결과와도 일맥상통합니다. TIMSS는 참가국들이 수학 주제들을 도입하여 취급한 기간의 평균을 구하고, 참가국들의 평균 기간에 대한 중앙값을 구하여 그 차이를 조사하였는데, 우리나라는 각각의 수학 주제를 취급한 시간의 평균이 참가국의 평균 지속 기간에 대한 중앙값보다 1년 짧았으며 미국은 1.7년 길었습니다. 이는 어떤 한 주제를 취급하는 평균 기간을 고려할 때, 미국이 우리나라에 비해 약 3년(2.7년) 정도 더 오랜 시간 동안 다룬다는 것을 의미합니다(나귀수 외, 2001).

2) 진정한 나선형 교육과정으로 구성되어야

우리나라는 한 주제를 가르치고 나면 이후 관련되는 다른 개념이 나왔을 때는 이전 개념에 대한 이해가 충분하다고 보고 복습 없이 그냥 새로운 개념을 가르칩니다. 그렇기 때문에 여러 가지 이유로 특정 개념을 이해하지 못한 학생은 이후 수학 개념을 학습하는 데 곤란을 느끼게 되고, 결국 과거를 극복하지 못하면 수학을 포기하게 됩니다.
초등학교 연산의 경우도 반복학습보다는 유형을 단계별로 구분하여 매시간 한 가지를 한 번씩만 가르칩니다. 그러므로 그날 배운 내용은 그날 반드시 소화를 해야 합니다. 그 다음 시간에는 당연히 이전 시간에 배운 것을 알고 있다는 전제 아래 수업이 진행되며, 다시는 이전 차시에 배웠던 내용을 복습하지 않습니다. 복습을 할 시간이 없고 반복학습이 교과서에 제시되지 않고 있습니다. 그러나 학생들의 배움은 그렇게 일어나지 않습니다. 물론 한 번 듣고 바로 이해하는 학생도 있지만 대부분의 학생은 어느 정도의 시간과 노력이 투여된 후에야 이해하게 됩니다(초등교육과정연구모임, 2014).
우리나라가 이렇게 한 주제를 취급하는 시간이 짧아진 원인은 교육과정 개정 시기마다 교육과정 내용을 줄이라는 총론의 방침에 수학과가 따르지 않았기 때문입니다. 그 증거는 오늘날 많은 성취 기준이 복문으로 되어 있다는 것에서 찾을 수 있습니다.

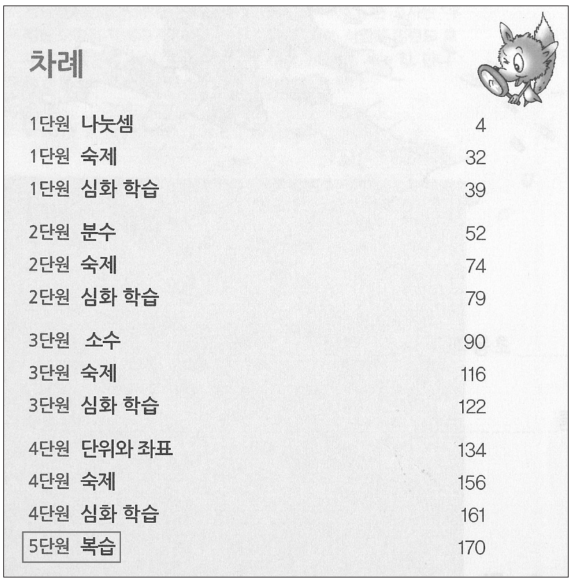
> [초등학교 1~2학년군]
> ㈎ 수와 연산
> [1] 네 자리 이하의 수
> ① 0과 100까지의 수 개념을 이해하고, 수를 세고 읽고 쓸 수 있다.
> ② 일, 십, 백, 천의 자릿값과 위치적 기수법을 이해하고, 네 자리 이하의 수를 읽고 쓸 수 있다.
> ③ 네 자리 이하의 수의 범위에서 수의 계열을 이해하고, 수의 크기를 비교할 수 있다.
> ④ 하나의 수를 두 수로 분해하고 두 수를 하나의 수로 합성하는 활동을 통하여 수 감각을 기른다.

위에 있는 것은 2009 개정 교육과정 중 초등학교 첫 영역의 첫 단원 성취 기준입니다. 네 개의 성취 기준으로 되어 있는데, 모두가 복문입니다. 수 개념을 이해하는 것과 수를 세고 읽고 쓰는 것이 하나의 성취 기준으로 묶여 있습니다. 이런 것이 중학교, 고등학교에서도 많이 나타납니다. 성취 기준의 개수를 줄이고서 교육과정을 감축했다고 보고서를 썼다는 증거입니다. 진정한 감축은 학습할 내용을 줄이는 것입니다. 이번 2015 개정 교육과정에서도 20%를 어떻게 줄일지 걱정됩니다.
하여튼 한 번 만에 모든 것을 이해하고 학습을 마치라는 비교육적인 요구는 이제 그만 둬야 합니다. 느리게 이해하고 처지는 학생들이 나타날 수 있음을 당연하게 여기고 여기에 대비

하는 교육과정이 필요합니다. 그래서 배우는 내용을 늘리기보다 하나를 배우더라도 철저하고 충분하게 이해할 수 있도록 반복해서 가르치는 배려가 필요합니다. 그런 면에서도 학습 내용을 줄어야 합니다.

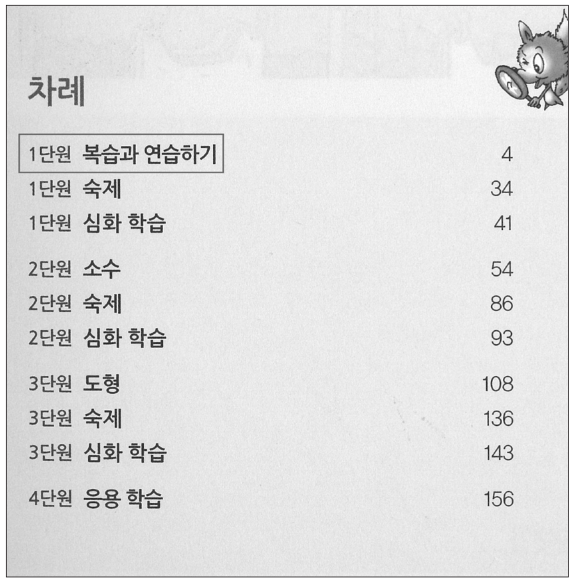
교과서에 복습 과정을 개설하는 것은 학생들의 학습 과정을 배려하는 것입니다. 미국의 대부분의 교과서 두꺼운 것은 이전 것들에 대해서 반복해서 충분히 학습할 여지를 마련해준 것으로 해석할 수 있습니다. 핀란드는 거의 매학기에 아예 복습 과정이 한 단원으로 주어져 있습니다.

[그림 Ⅲ-11] 핀란드 4-2, 6-1 교과서의 차례에 나타난 복습 단원



차례

1단원 나눗셈	4
1단원 숙제	32
1단원 심화 학습	39
2단원 분수	52
2단원 숙제	74
2단원 심화 학습	79
3단원 소수	90
3단원 숙제	116
3단원 심화 학습	122
4단원 단위와 좌표	134
4단원 숙제	156
4단원 심화 학습	161
5단원 복습	170



차례

1단원 복습과 연습하기	4
1단원 숙제	34
1단원 심화 학습	41
2단원 소수	54
2단원 숙제	86
2단원 심화 학습	93
3단원 도형	108
3단원 숙제	136
3단원 심화 학습	143
4단원 응용 학습	156

교육과정 국제비교 분석에서 보면 다른 나라들은 우리나라보다 한 주제를 이른 시기에 도입하더라도 간단하고 직관적으로 도입을 하다가 우리나라와 같은 수준까지 가르치는 시기는 대개 우리나라보다 늦게 나타나고 있습니다.

3. 수학 교과서 구성

가. 자기 주도적 발견학습이 가능한 교과서

교육과정의 교수 · 학습 방법에 "수학의 개념, 원리, 법칙, 기능의 교수 · 학습에서는 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상을 학습 소재로 하여 도입하거나 구체적 조작 활동과 탐구 활동을 통하여 학생 스스로 개념, 원리, 법칙을 발견하고 이를 정당화하게 한다."는 항목이 있습니다.
이 항목이 강조한 것은 발견입니다. 그것도 학생 스스로 발견하게 하는 것을 강조하고 있습니다. 이것이 구성주의 교육철학입니다. 구성주의 교육에서 교사 및 성인의 역할은 학생들이 스스로 학습할 수 있는 환경을 만들어 주는 것입니다. 수학 교과서에서는 이 부분이 잘 드러나야 합니다. 그래서 학생들이 자기 주도적으로 학습해 갈 수 있는 교과서가 제공되어야 보다 의미 있고 효과적인 수학 학습이 이루어질 수 있습니다.

지금 우리나라의 수학 교과서는 구성주의 교육철학이 반영되었다고 볼 수 없으며, 과거 수십 년 전의 행동주의 교육철학의 교과서 구성 방식이 그대로 남아 있습니다. 행동주의 교육철학에서는 교사가 목표를 명확하게 보여주고 그날 배울 것을 일방적으로 설명하면 학생들은 그것을 따라하는 모방 학습이 이루어지게 됩니다. 지금 우리나라 수학 교과서가 정확하게 그런 모습을 하고 있습니다. 다음 [그림 Ⅲ-12]는 2009 개정 교육과정의 중학교 1학년에서 소인수분해를 학습하는 내용에 해당하는 교과서입니다.

[그림 III-12] 2009 개정 교육과정 중1 수학 교과서의 소인수분해

소인수분해는 무엇인가?

생각해 봅시다 예지는 24를 다음과 같이 두 자연수의 곱으로 나타내려고 한다. 물음에 답하여 보자.

24 < 1, 24   24 < 2, ○   24 < ○, 8   24 < 4, ○

(1) ○ 안에 알맞은 자연수를 써넣어 보자.

(2) 24의 약수 중에서 소수인 것을 모두 말하여 보자.

6의 약수는 1, 2, 3, 6이다. 이 약수를 6의 인수라고도 한다. 특히, 2와 3은 소수이면서 6의 인수이다. 이와 같이 소수인 인수를 **소인수**라고 한다.

보기 20의 인수는 1, 2, 4, 5, 10, 20이다. 이 중에서 2, 5는 소수이므로 20의 소인수는 2, 5이다.

5 다음 수의 소인수를 모두 구하여라.

(1) 16　(2) 18　(3) 30　(4) 45

20은 $2\times2\times5$와 같이 소인수들만의 곱으로 나타낼 수 있다. 이와 같이 20을 소인수들만의 곱으로 나타내는 것을 20을 **소인수분해**한다고 한다.

예제 **1** 60을 소인수분해하여라.

풀이 크기가 작은 소인수부터 차례대로 찾아 60을 소인수분해하면 다음과 같다.

|방법 1|
$$\begin{aligned}60&=2\times30\\&=2\times2\times15\\&=2\times2\times3\times5\\&=2^2\times3\times5\end{aligned}$$

|방법 2| 60 < 2, 30 < 2, 15 < 3, 5

|방법 3|
$$\begin{array}{r|l}2 & 60\\ \hline 2 & 30\\ \hline 3 & 15\\ \hline & 5\end{array}$$

답 $2^2\times3\times5$

16 Ⅰ. 수와 연산

과거의 우리나라 교과서의 구성은 동기 유발 부분이 미약했습니다. 바로 교과서 첫 서두에서부터 수학 개념을 제시했었습니다. 그러다가 고등학교 교과서는 제6차 교육과정부터, 초등학교와 중학교 교과서는 제7차 교육과정부터 구체적 조작 활동이나 생각을 여는 활동을 본문 이전에 제시하기 시작했습니다. 그 흐름은 지금까지 이어져 오고 있습니다.

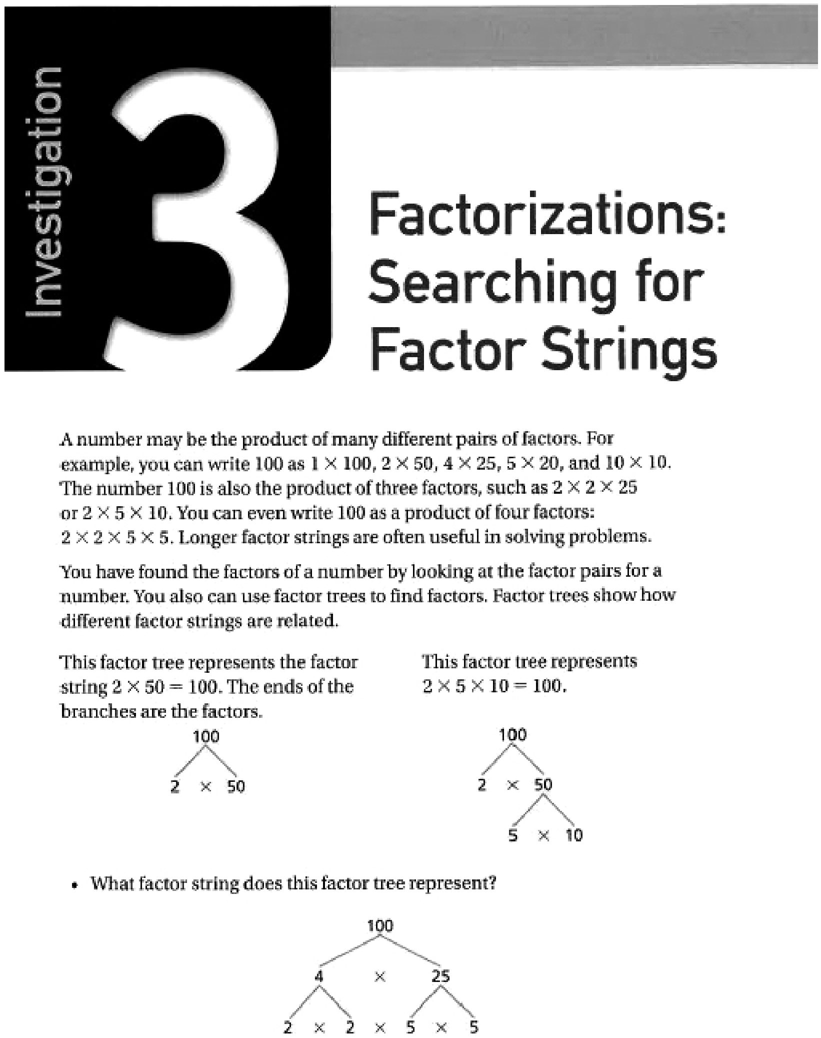
지금 [그림 Ⅲ-12]를 보면 소인수분해를 하는 생각을 열기 위해 활동이 제시되었습니다. 그런데 그 다음에 바로 소인수와 소인수분해의 정의가 나옵니다. 소인수분해가 왜 필요한지, 어떻게 할 수 있는지 등을 학생들이 발견하게 하는 것이 아니라 교사의 일방적인 설명에 의해서 학습되도록 주어져 있습니다. 학생들은 소인수분해가 왜 필요한지, 어떻게 해서 나왔는지는 영문도 모른 채 잠자코 교사의 설명을 듣고 소화해내야 합니다. 하지만 여기서 정서적인 거부가 시작됩니다. 학습자가 학습할 필요를 느낄 틈이 없이 교사의 설명이 제공되기 때문입니다. 듣다 못한 학생들이 질문을 합니다.

"선생님! 소인수분해를 왜 배워요?"
"크면 안다.", "나중에 알게 돼!"
"그렇게 따지는 사람치고 공부 제대로 하는 녀석을 본 적이 없다."

정의에 대한 강제적 설명이 끝나자마자 교사가 예제를 풀어줍니다. 예제란 학생들이 문제를 스스로 푸는 것이 아니라 그 풀이 과정까지 시범적으로 제공되어서 학생들은 교과서의 풀이를 눈으로 읽거나 교사의 시범적인 풀이 과정을 들을 수밖에 없습니다. 그 다음에 나오는 유사 문제를 풀 때쯤에야 비로소 학생들이 활동할 기회가 주어지지만 유사 문제를 푸는 과정은 교사의 시범에 대한 모방일 뿐입니다.
구성주의 교육철학을 가진 교사는 자기와 철학이 다른 방식으로 구성된 현재의 교과서를 사용할 수 없으므로 매 시간 교과서를 재구성해서 사용합니다. 교과서가 구성주의 교육철학에 맞게 학생들의 자기 주도적인 발견 학습이 가능하도록 바뀌면 간단한 일인데 교사가 매시간 교과서를 재구성해서 사용할 수밖에 없는 것이 현재 우리나라 학교의 현실입니다.

다음 [그림 Ⅲ-13]은 소인수분해를 가르치는 미국의 뉴욕주에서 사용하는 〈Connected Mathematics〉라는 교과서입니다.

[그림 Ⅲ-13] 미국 Connected Mathematics 교과서의 소인수분해 1



Investigation 3

Factorizations: Searching for Factor Strings

A number may be the product of many different pairs of factors. For example, you can write 100 as 1×100, 2×50, 4×25, 5×20, and 10×10. The number 100 is also the product of three factors, such as $2 \times 2 \times 25$ or $2 \times 5 \times 10$. You can even write 100 as a product of four factors: $2 \times 2 \times 5 \times 5$. Longer factor strings are often useful in solving problems.

You have found the factors of a number by looking at the factor pairs for a number. You also can use factor trees to find factors. Factor trees show how different factor strings are related.

This factor tree represents the factor string $2 \times 50 = 100$. The ends of the branches are the factors.

This factor tree represents $2 \times 5 \times 10 = 100$.

- What factor string does this factor tree represent?

[그림 Ⅲ-13]에서 보면 단원명은 소인수분해지만 내용은 약수짝을 찾는 이전의 경험과 연결을 시작합니다. 이것은 이후에 이루어질 퍼즐에 대한 준비이기도 합니다. 이 부분은 [그림 Ⅲ-12]에 있는 우리나라 교과서와 비슷합니다. 그 다음 과정이 우리나라와 차이가 있습니다. 여기서 바로 소인수분해의 정의를 교사가 설명하지 않습니다. 생각을 열고 동기를 유발하는 활동을 지속하게 합니다. 그래서 학생들이 스스로 소인수분해의 필요성과 방법을 발견해 내도록 시간을 주고 활동을 시킵니다. 교사가 이렇듯 소인수분해로 다짜고짜 들어가지 않고 우회하는 과정을 통해서 학생들이 스스로 소인수분해를 발견하고 그 필요성을 느끼도록 기다려줍니다.

[그림 Ⅲ-14] 미국 Connected Mathematics 교과서의 소인수분해 2

3.1 The Product Puzzle: Finding Factor Strings

In the Product Puzzle, you look for strings of factors with a product of 840.
Two factor strings are marked in the puzzle shown.

The Product Puzzle

5	42	14	15	56	3
20	3	4	420	28	5
70	12	35	210	2	168
120	24	14	2	28	84
7	280	3	4	6	10
3	2	105	140	4	5
20	40	8	21	2	7

How many factor strings for 840 can you find?

Problem 3.1

A Make a list of the factor strings for 840 in the Product Puzzle. Order the strings by the number of factors.

B Choose a factor string for 840 with two factors. How can you use this string to find a factor string with three factors?

C
1. What is the longest factor string on your list? Is there a longer factor string? Explain.
2. How do you know when you have found the longest string of factors for a number?
3. Strings of factors are different if they differ in a way other than the order of the factors. How many different longest strings of factors are there for 840?

[그림 Ⅲ-14]를 보면 소인수분해라는 단원에 들어왔지만 우리나라와 같이 소인수분해가 뭔가를 직접 정의하고 있지 않습니다. 소인수분해를 왜 해야 하는가에 대한 필요성을 스스로 발견하게 하고, 정의를 하는 것도 어느 정도 배경 지식과 동기가 생겨난 이후에 가능하기 때문입니다. 직접적으로 소인수분해를 정의하고 가르치려 하기보다 간접적으로 퍼즐 게임 속으로 빠져 들게 하면서 저절로 소인수분해를 하게 만듭니다. 학생들은 소인수분해가 뭔지는 모르지만 퍼즐에 집중하게 됩니다.

[그림 Ⅲ-15] 미국 Connected Mathematics 교과서의 소인수분해 3

3.2 Finding the Longest Factor String

Strings of factors are called **factorizations.** The longest possible factor string for 840 is made up of prime numbers. This string is the **prime factorization** of 840.

You can use a shorthand notation to write prime factorizations. For example,

$$\begin{aligned} &\underbrace{2 \times 2 \times 2} \times 3 \times 5 \times 7 \\ 840 = {} & 2^3 \times 3 \times 5 \times 7 \end{aligned}$$

The small raised number is an *exponent.* An **exponent** tells you how many times a factor is used. For example, the prime factorization of 840 uses the number 2 three times.

In the product $2^3 \times 5^4$, the exponents mean "Use a 2 three times as a factor and use a 5 four times."

$$2^3 \times 5^4 = \overbrace{2 \times 2 \times 2}^{\text{three factors}} \times \overbrace{5 \times 5 \times 5 \times 5}^{\text{four factors}} = 5{,}000$$

This means that you can write the prime factorization of 5,000 in two ways:

$5{,}000 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$	Expanded Form
$= 2^3 \times 5^4$	Exponential Form

[그림 Ⅲ-15]를 보면 퍼즐로 소인수분해를 어느 정도 경험한 이후에 비로소 정의가 나옵니다. 우리나라 교과서가 부족한 부분이 바로 이 지점입니다. 다른 나라 역시 40년 전에는 우리와 똑같은 교과서를 사용했습니다만 지금은 많은 교과서가 학생들의 자기 주도적 발견을 배려하고 있습니다. 앞에서 중3 교과서의 인수분해의 설명 과정과 같이 우리나라 수학 교과서는 조금 심하게 이야기하면 해방 이후에 바뀐 적이 없습니다. 교사의 훌륭한 설명과 주입식 강의 하나면 충분하다는 전근대적 교육관이 그대로 유지되고 있습니다.
교육과정의 교수 · 학습 방법에 "수학적 추론 능력을 신장시키기 위하여 귀납, 유추 등을 통해 학생 스스로 수학적 사실을 추측하고, 이를 정당화할 수 있게 한다."는 규정은 미사여구에 불과합니다. 교육과정은 이렇지만 이를 구현한 우리나라 수학 교과서는 수학적 사실을 학생이 스스로 추측하고 정당화할 수 있게 구성되지 않았습니다.

'자기 주도적 학습이 가능한 교과서'라는 문구를 우리나라가 전혀 사용하지 않는 것은 아닙니다. 지금도 사용하고 있습니다. 2009 개정 교육과정 초등학교 수학 익힘책은 맨 뒤에 익힘책 문제의 정답과 자세한 풀이를 수록하였습니다. 과거에는 풀이를 준 적이 없는데 처음 풀이를 제공한 이유는 '학생들의 자기 주도적 학습에 도움이 되도록' 하기 위함이라고 말하고 있습니다(박만구 외, 2013).

고등학교 수학 교과서는 제6차 교육과정부터, 중학교 수학 교과서는 제7차 교육과정부터 교과서 맨 뒤에 본문에 나오는 문제의 풀이를 자세히 수록하도록 했습니다. 그때도 '자기 주도적 학습'을 위함이라고 했습니다. 우리나라에서 '자기 주도적' 학습을 위한 배려는 지금까지 공식적으로는 교과서나 익힘책의 풀이를 제공해서 스스로 문제를 풀고 답을 확인할 수 있도록 하는 수준에 머물러 있음을 알 수 있습니다.
한편, 인터넷에서는 말하는 자기 주도적 학습(自己 主導的 學習, Self-Directed Learning)은 학습자 스스로 학습 목표를 설정하고 학습 과정 및 전력, 학습자원을 결정하여 학습을 수행하고 학습 결과를 스스로 평가하는 일련의 학습과정을 말합니다(Daum 백과사전). 자기 주도적 학습은 문제를 풀고 그 풀이 과정을 확인할 수 있도록 풀이를 제공하는 것이 아니라 학습 목표 설정부터 시작하여 학습할 내용과 과정을 선정하는 등에 더 초점이 맞춰져 있습니다. 교사가 주입식으로 수학 개념을 가르치지 않고 학생이 스스로 그 개념을 발견하고 형성해 나갈 수 있도록 수업 계획을 제공하고 안내하는 역할을 하는 것을 말합니다. 그리고 그런 학습 기회를 제공하는 것이 교과서가 될 수 있습니다.
이번 2015 개정 교육과정에 의한 수학 교과서는 반드시 자기 주도적 학습이 가능하도록 개발되어야 합니다. 그러기 위해서는 역시 수학의 학습 내용이 지금보다 대폭 줄어야 합니다.

나. 교과서에서는 분리된 영역을 최대한 통합해야

교육과정은 수학의 학문적 특성을 고려하여 5개 영역으로 구분하더라도 교과서는 학습자의 특성을 고려하여 통합적으로 구성해야 합니다. 외국의 교과서를 분석하면서 통합의 방향을 두 가지로 발견할 수 있었습니다.
첫째는 영역간 통합입니다. 특히 대수 영역(수와 연산, 문자와 식, 함수)에서 수와 연산, 문자와 식은 함수를 위해 존재하는 것이 많습니다. 규칙성이나 자료 정리 등의 영역은 별도로 독립하여 구성하기 다른 영역 속에서 같이 학습되어야 합니다. 핀란드 초등학교의 경우 교육과정은 수와 계산, 대수, 기하, 측정, 자료 처리와 통계 등 5개의 영역으로 구분되어 있지만 교과서를 보면 자료 처리와 통계 단원은 5학년 2학기에만 명시적으로 나타나고 있습니다. 다른 학기의 교과서는 연산 영역이나 기하 영역에서 통계를 다루고 있습니다.

둘째, 교과서의 단원이나 주제를 학문적인 용어보다는 최대한 학생들의 경험에 맞게 이름 짓는 것입니다. 이것은 수학의 개념을 학생 스스로 발견하는 기쁨을 주는 목적에서 받아들일 필요가 있습니다. 수학의 학문적 용어로 단원의 이름을 정하는 것은 목표를 제시하고 받아들이도록, 그래서 학생들로 하여금 스스로 사고하여 발견하기보다 답을 미리 알려주는 역

효과가 있음을 주의해야 합니다. 인지적인 목표나 정의가 드러나지 않게 해서 학습이 이루어지는 과정에서 그날의 학습 목표를 학생 스스로 발견하는 경험은 자기 주도성을 확보하고 자아 효능감을 높이는 중요한 계기가 될 것입니다. 수학에 대한 정의적 영역의 성취를 높이는 효과도 노릴 수 있습니다.
독일의 교과서를 보면 교과서의 단원명에 우리와 큰 차이점을 보입니다. 예를 들면 함수 영역에서 우리나라 교과서의 단원명은 '일차함수', '이차함수'와 같은 학문 중심적인 단원명을 사용하지만 독일 교과서는 '바퀴와 톱니바퀴', '행운과 우연'과 같이 실생활 소재나 감성적인 단어를 단원명으로 사용하여 단원의 시작부터 내용 전체를 주도하고 있습니다. 이는 현실과의 관련성을 중시하는 독일의 수학교육사상을 드러내는 것일 뿐만 아니라 학습자로 하여금 수학은 흥미롭고 실용적인 학문임을 느낄 수 있도록 해줍니다. 이런 단원명은 미국의 중학교 교과서(Connected Mathematics, Mathematics in Context)에서도 찾아볼 수 있습니다(자세한 내용은 Ⅳ장 참조).

다. 고등 사고력 배양이 가능한 교과서

우리나라의 수학 교과서에 실린 문제는 낮은 수준의 사고를 요하는 문제가 대부분이라는 것이 여러 연구에서 드러났습니다(홍창준, 김구연, 2012; 권지현, 김구연, 2013; 김미희, 김구연, 2013). 이것은 우리나라 수학 교과서가 개념을 발견하고 형성하는 쪽이 아니고 처음부터 개념과 성질을 가르치고 난 후에 문제가 나오기 때문에 문제의 성격이 개념이나 지식을 곧바로 이용하거나 또는 공식이나 성질을 이용한 기계적인 수준의 문제가 주를 이룰 수 밖에 없다고 볼 수 있습니다.

홍창준, 김구연(2012)이 우리나라 2007 개정 교육과정의 중학교 수학 교과서 5종의 함수 단원에 나온 총 397개의 과제를 분석틀에 따라 분석한 결과 낮은 수준(Low-Level)의 과제는 95%의 비율로 나타났고, 높은 수준(High-Level)의 과제는 5%에 불과한 것으로 나타났습니다(〈표 Ⅲ-13〉).

〈표 Ⅲ-13〉 중학교 수학 교과서 5종의 함수 단원의 수학 과제 분석 결과 정리

인지적 노력수준 / 교과서	Low-Level(%)	High-Level(%)
A	93	7
B	94	6
C	92	8
D	100	0
E	99	1
평균	95	5

이로써 우리나라 중학교 수학 교과서에 포함된 대부분의 수학 과제가 알고리즘적이고 간단한 절차만을 이용해서 해결할 수 있는 방법으로 정답을 찾아내도록 유도하는 과제만 제시된 것을 알 수 있습니다.

김미희, 김구연(2013)이 우리나라 고등학교 1학년 수학 교과서 중 대표적인 두 권에 나온 총 2565개의 과제를 분석틀에 따라 분석한 결과 낮은 수준(Low-Level)의 과제는 94%의 비율로 나타났고, 높은 수준(High-Level)의 과제는 6%에 불과한 것으로 나타났습니다(우리나라 고등학교 교과서의 과제 분석의 자세한 사항은 Ⅴ장 참고).

Stein & Kim의 연구에 따르면 미국의 초등학교 교과서 Everyday Mathematics에서 높은 수준의 과제의 비율이 91%, Investigations에서는 높은 수준의 과제의 비율이 100%로 나타났습니다(홍창준, 김구연, 2012에서 재인용).

미국의 뉴욕 주에서 현재 사용 중인 중학교 교과서 중 하나인 Connected Mathematics의 최대공약수와 최소공배수 단원에 나온 문제의 수준을 분석해 보면, 총 173개의 과제 중 34개(19.7%)가 낮은 수준의 문제였고, 나머지 139개(80.3%)가 높은 수준의 문제였습니다.

이상에서 예로 든 미국 교과서의 과제 수준이 높은 것은 문제가 어려워서가 아니라 교과서 구성이 개념과 공식을 그냥 가르치고 그 개념과 공식을 이용하는 단순히 이용하는 절차를 주로 묻는 문제가 아니라 개념을 발견하도록 하는 학습 과정에서 던지는 질문들이 깊이 있는 수학적 사고를 요하는 문제들이기 때문입니다. 이렇게 개념을 발견하고 개념적인 고민을 질문하게 되면 학생들은 깊이 있는 근본적인 사고를 하게 되며, 이 과정에서 수학적 사고력이 확장될 수 있는 것입니다.

수학 개념을 발견하도록 하는 쪽으로 교과서 구성을 바꾸면 하나하나의 질문이 단순히 이미 알려진 수학 지식을 이용하는 단순한 문제가 아니라 새로운 것을 깨달아가는 과정에서 닥치

게 되는 고도의 사고를 요하는 문제가 저절로 나오게 되는 것입니다. 그러므로 주입식 수업을 위한 교과서가 아닌 발견 학습을 위한 교과서로 개발하면 그 교과서 속에는 이런 과제가 자연스럽게 담길 것으로 예상할 수 있습니다. 그리고 의도적으로 사고를 요하는 높은 수준의 문제를 개발하는 과정도 필요할 것입니다.

최근 교육과정은 4년 간격으로 세 번 바뀌고 있습니다. 초등학교부터 시작하여 점차적으로 중학교와 고등학교에 새 교육과정을 적용하려면 초등학교 1학년부터 한 해에 한 학년씩 적용하는 것이 정상적일 것이며, 이럴 경우 그 기간은 12년이 걸립니다. 그러나 대부분 그렇게 바꾼 적은 없습니다. 그래서 초등학교 1, 2학년부터 시작하여 다음해는 초등학교 3, 4학년과 중학교 1학년을, 그 다음해에는 초등학교 5, 6학년, 중학교 2학년, 고등학교 1학년을 바꾸는 식으로 하더라도 최소 5년이 걸립니다. 초등학교 1, 2학년과 중학교 1학년을 동시에 바꾸기 시작해도 4년은 걸립니다. 여기에 교육과정 총론과 각론을 개발하는 데 걸리는 최소 시간 2년과 교과서 집필에 걸리는 최소 1년을 감안하면 7년이 최소 시간입니다. 그러므로 4년 간격으로 교육과정이 바뀐다는 것은 적용이 미처 진행되기 전에 벌써 새 교육과정 총론을 연구하기 시작한다는 것입니다.
이번 2015 개정 교육과정 위원회는 2013년에 꾸려졌습니다. 2013년은 아직 고등학교에 2009 개정 교육과정이 적용되기 이전입니다. 그런데 새로운 교육과정을 만든다고 나선 것입니다. 새로운 교육과정을 만들어 거기에 따른 교과서가 제작되어 교육을 시작하기도 전에 이전 것이 잘못되었다며, 보완할 점이 생겼다며, 창의적 융합 인재를 양성해야 한다며 등등의 이유로 교육과정을 개정하고 있습니다.
이런 과정 속에서 교과서에 대한 연구는 기대할 수조차 없습니다. 그래도 최근에 비교적 오래 시행이 지속된 제7차 교육과정 기간에는 교과서와 교육과정에 대한 연구가 많았습니다. 미흡하지만 그런 연구가 2007 개정 교육과정에 반영되었습니다. 그런데 2007 개정 교육과정 이후 연거푸 4년 간격으로 교육과정이 개정되는 동안 집필진은 교과서를 제작하는 데만 시간을 다 보내고 있습니다. 집필진은 초등학교 5, 6학년 2학기 교과서를 지금 탈고하고 있습니다. 그런데 올 2학기에 각론이 발표되면 집필진은 다시 내년에 실험할 초등학교 1, 2학년 교과서를 몇 달 안에 제작해야 합니다. 연구는커녕 내용을 제대로 채우기나 할 수 있을지 걱정됩니다.
이런 형편을 생각하면 새로운 교과서에 대한 연구, 교과서의 진정한 방향을 주문하는 것은 배부른 소리일 것입니다. 자기 주도적인 학습, 발견 학습, 체험 중심의 활동 학습, 학생의 참여가 가능한 수업 등은 구호에 그칠 뿐입니다. 이런 것이 가능한 교과서로 변신하려면 나비가 애벌레를 벗어나는 것 이상의 노력과 세월을 필요로 합니다. 그런데 그럴 시간이 주어지지 않습니다. 그러니 교과서 연구는 항상 공염불에 그치고 맙니다.

교육과정이 천천히 바뀐다면 좋은 교과서, 질 높은 교과서, 수학 개념을 학생들이 자기 주도적으로 발견하는 것이 가능한 교과서가 만들어질 수 있겠는가를 생각해 보면 이 또한 시원한 답을 할 수가 없습니다. 그것은 7년이나 지속된 제7차 교육과정 이후에 나온 2007 · 2009 개정 교육과정의 수학 교과서가 이전의 교과서에 비해 질이 좋아졌다는 보장을 할 수가 없기 때문입니다.
왜 여유가 많고 적음에 관계없이 좋은 교과서 개발이 안 되고 있을까요? 그것은 좋은 교과서의 모델, 즉 구성주의 교육철학에 의한 자기 주도적 학습 경험이 교과서 집필자들에게 없기 때문이며, 아직껏 누구도 이 분야에 새로운 시도를 한 적이 없다는 것이 가장 큰 이유라고 봅니다. 또한 대입시에 절대적 영향력을 가지고 있는 수능 시험이 결과 중심의 선다형 · 단답형 문제로 이루어져 있고, 수학 내용 지식과 문제 유형을 암기하여 푸는 것이 유행하는 탓에 시간이 걸리고 수업 준비가 힘든 자료 개발을 애쓸 필요가 없기 때문이기도 합니다.

이런 상황에서는 국가가 주도적으로 교과서 개발에 앞장서야 합니다. 교육부가 그 필요성을 인식하고 자기 주도적 학습이 가능하고, 학생들이 스스로 수학 개념을 발견할 수 있도록 배려하는 교과서를 개발해야 합니다. 그래야 지금의 주입식 수업에 적합한 교과서가 학생들의 체험과 수학 개념 형성 과정을 충분히 고려한, 그래서 누구도 수학을 포기하지 않고 수업에 참여가 가능한 그런 교과서를 구성하는 경험하면 현재의 학습 내용이 너무 많다는 것이 증명될 것입니다.
수학교육의 핵심인 수학 수업은 교과서입니다(김구연, 2013). 실제로 수학을 전공했다고 보기 어려운 초등 교사들은 수학 수업에서 교과서 및 교사용 지도서에 대한 의존도가 대단히 높을 수밖에 없습니다. 그러므로 교과서에 포함된 수학 과제들을 통해 학생들은 수학을 경험하게 되고 수학 학습에도 영향을 줍니다. 수학을 전공했다고 하지만 중등 수학교사들의 경우에도 교과서나 교사용 지도서는 가장 중요한 수업 자료입니다. 우리나라 교사들은 수능 범위가 교과서 전체인 현실에서 교과서를 바이블처럼 빠짐없이 가르칠 수 밖에 없습니다.

4. 영재교육과 수학 경시대회 남발의 문제

2002년 영재교육진흥법이 시행되고 14년이 흘렀습니다. 이제는 영재학교가 고등학교를 중심으로 8개가 설립되었고, 전국의 모든 시도교육청에는 영재교육원이나 영재학급이 설치되어 영재교육 대상자가 3%에 다다르고 있습니다. 아직도 수학 · 과학 분야의 영재교육이 주를 이루고는 있지만 이제 인문 · 사회나 예체능 분야의 영재교육도 뿌리를 내리고 있습니다.

그리고 영재교육 대상도 점점 초등 저학년으로 내려가고 있습니다. 이렇듯 양적으로는 영재교육이 팽창하고 있는 시점에서 우리는 과연 영재교육이 제대로 시행되고 있는 것인가를 되돌아 볼 필요가 있습니다.
결론적으로 말하면 현재의 영재교육 기관은 제 역할을 수행한다고 보기 어렵습니다. 순수한 의미의 영재교육을 담당하는 것보다는 또 다른 선행학습 기관으로 전락되어 우리 수학교육의 정상화에 악영향을 끼치고 있는 것입니다.
영재학교나 영재교육원 입학을 위한 선발 과정에서 출제되는 문제는 고난이도 선행학습을 한 학생들에게 유리한 것들입니다. 선행학습으로 길러진 문제풀이 능력을 측정하는 시험 문제는 제대로 된 영재 선발의 도구가 될 수 없습니다. 중학생에게 응시 기회가 주어지는 영재(고등)학교의 경우 그 선발 시험에 대비하기 위해서는 중학교 1학년 이전까지 고등학교 수학 전체를 마쳐야 하며, 중학교 2학년부터는 올림피아드 수학 문제집을 공부하는 것이 정설처럼 퍼져 있습니다.
영재교육원 교육대상자를 선발하는 과정에서도 창의성 검사라는 명목으로 지필고사를 실시하고 있으며, 여기에 나오는 문제 역시 영재학교 선발시험 문제와 그 성격이 비슷합니다. 이런 문제를 통해서 영재를 선발하는 것이 오히려 영재 교육의 발전과 수학교육의 정상화를 저해하고 있습니다.

가. 영재교육에 대한 질적인 평가가 이루어져야

14년이나 된 영재교육에 대한 질적인 평가가 제대로 이루어지지 않고 있습니다. 교육은 교육부에서 2014년 말부터 영재교육에 대한 지표를 만들어 각 시도교육청을 평가하고 있습니다. 그러나 그 평가 지표가 질적인 부분보다는 양적인 성격뿐인 내용이라서 교육의 질이 평가되지 않고 있습니다. 또한 책임 있는 국가기관의 평가 보고서도 없는 형편입니다.
현 교육부는 작년 12월 초에 시도별 평가를 불과 보름 앞둔 시점에서 영재교육이 시도별 평가지표가 되면서 시도교육청 담당자들을 당혹스럽게 했습니다. 그런데 그 영재교육 평가지표를 보면, 오직 양적인 지표인 영재교육 대상자 수와 영재교육에 투입한 예산만으로 평가하고 있습니다. 다음 [그림 Ⅲ-16]에서 우리나라는 2003년에 불과 400개였던 영재교육 기관이 2014년에는 3,172개로 무려 8배가 증가한 것을 보여줍니다.

[그림 Ⅲ-16] 영재교육 기관 수의 변화

이렇게 불일 듯 불어나는 영재교육 기관 확대를 보면 앞으로 영재학교는 크게 확대될 것입니다. 그리고 영재학교 확대는 곧 영재교육의 질에 대한 부실로 이어질 것입니다. 여전히 영재교육을 담당하는 교사들 중 영재교육을 제대로 이해하는 전문가는 극히 드물며, 교사들에 대한 영재교육 연수가 영재기관 확대를 뒤따라가지 못하기 때문에 학교의 보통교육과 별반 다르지 않는 교육을 영재교육이라고 실시하고 있을 뿐입니다. 교육부는 영재교육 기관을 확대할 생각보다는 오히려 축소해서 우리나라 현실에 맞는 영재교육을 해야 할 것입니다. 현재 시행되고 있는 영재교육은 제대로 된 교육과정마저도 없이 담당 교사가 임의로 만든 지도안으로 시행되고 있습니다. 그러므로 기관마다 교사마다 천차만별인 교육을 영재교육 진흥이라는 명분만으로 엄청난 국민의 세금을 쏟아 붓고 있는데, 교육부는 시급히 이에 대한 질적인 평가를 하여 세금을 낭비하는 일이 없도록 해야 할 것입니다.

나. 영재교육 커리큘럼

교육부는 영재교육 기관에 국가 수준의 교육과정 표준안을 만들어서 제공했어야 합니다. 그래서 이 표준안을 기준으로 영재교육 기관의 질적인 지도를 해야 합니다. 하지만 영재학교를 비롯하여 영재교육원과 영재학급에 대한 교육과정은 전적으로 각 기관에 맡겨져 있습니다. 그래서 각 영재교육 기관마다 교육과정에 편차가 너무 심한 형편입니다.

영재(고등)학교 입학에 대비하기 위해서는 초등학교 저학년에서 선행을 시작하여 늦어도 중

1까지 고등학교 과정의 수학 학습을 선행으로 마치고, 중2부터는 올림피아드 수학 문제로 훈련을 1년 이상 받아야 한다는 것이 사교육계의 정설로 자리 잡고 있습니다. 그 이유는 〈표 Ⅲ-14〉와 같은 영재학교의 교육과정 운영에서 찾아볼 수 있습니다.

〈표 Ⅲ-14〉 서울과학고(영재학교) 2014학년도 입학생 교육과정

<table>
<tr><th colspan="3" rowspan="2">구분</th><th colspan="4">필수과목</th><th colspan="4">선택과목</th><th rowspan="2">총계</th></tr>
<tr><th>기본필수</th><th>소계</th><th>심화필수</th><th>소계</th><th>기본 선택</th><th>이수 학점</th><th>심화 선택</th><th>이수 학점</th></tr>
<tr><td rowspan="8">교과활동</td><td rowspan="4">일반 교과</td><td>국어</td><td>국어Ⅰ(2)
국어Ⅱ(2)
독서Ⅰ(1)
독서Ⅱ(1)</td><td>6</td><td>독서Ⅲ(1)
독서Ⅳ(1)</td><td>2</td><td>현대문학(2)
고전문학(2)
작문(2)
문법(2)</td><td>6</td><td>매체언어
비평(2)
영미문화탐구(2)
경제학(2)
예술사(2)
디자인(2)</td><td>4</td><td rowspan="8">154</td></tr>
<tr><td>사회</td><td>정치경제(3)
세계문화지리(3)
한국사(3)</td><td>9</td><td>철학(3)
세계사(3)</td><td>6</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">외국어</td><td rowspan="2">영어Ⅰ(3)
영어회화Ⅰ(1)
영어Ⅱ(3)
영어회화Ⅱ(1)</td><td rowspan="2">8</td><td>커뮤니케이션(2)
고급커뮤니케이션(2)</td><td>2</td><td rowspan="2">영어Ⅲ(3)
영어독해(3)
영작문(3)
시사영어(3)</td><td rowspan="2">6</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>중국어Ⅰ(2)
중국어Ⅱ(2)</td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td>예체능</td><td>건강과 체육Ⅰ(1)
건강과 체육Ⅱ(1)
여가와 체육Ⅰ(1)
여가와 체육Ⅱ(1)
음악Ⅰ(1)
음악Ⅱ(1)
미술Ⅰ(1)
미술Ⅱ(1)</td><td>8</td><td></td><td></td><td>생활체육(2)
생활음악(2)
생활미술(2)</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>소계</td><td></td><td>31</td><td></td><td>14</td><td></td><td>14</td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="2">융합 교과</td><td>융합과학(3)
융합과학탐구(2)</td><td>5</td><td></td><td></td><td>과학사(2)
수리정보탐구(2)</td><td></td><td>창의융합특강(2)</td><td></td></tr>
<tr><td>전문 교과</td><td>수학</td><td>수학Ⅰ(4)
수학Ⅱ(4)
수학Ⅲ(3)
수학Ⅳ(4)</td><td>15</td><td>미적분학Ⅰ(4)</td><td>4</td><td>미적분학Ⅱ(3)
기초통계학(3)</td><td>3</td><td>정수론(3)
선형대수학(3)</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3" rowspan="2">구분</th><th colspan="4">필수과목</th><th colspan="4">선택과목</th><th rowspan="2">총계</th></tr>
<tr><th>기본필수</th><th>소계</th><th>심화필수</th><th>소계</th><th>기본 선택</th><th>이수 학점</th><th>심화 선택</th><th>이수 학점</th></tr>
<tr><td rowspan="3">교과활동</td><td rowspan="3">전문교과</td><td>과학</td><td>물리학Ⅰ(3)
물리학Ⅱ(3)
화학Ⅰ(3)
화학Ⅱ(3)
생명과학Ⅰ(3)
생명과학Ⅱ(3)
지구과학Ⅰ(3)
지구과학Ⅱ(3)</td><td>24</td><td>물리학Ⅲ(4)
화학Ⅲ(4)
생명과학Ⅲ(3)
지구과학Ⅲ(3)
물리학실험Ⅰ(1)
물리학실험Ⅱ(1)
화학실험Ⅰ(1)
화학실험Ⅱ(1)
생명과학실험Ⅰ(1)</td><td>19</td><td>물리학Ⅳ(3)
화학Ⅳ(3)
생명과학Ⅳ(3)
생명과학실험Ⅱ(1)</td><td></td><td>고급물리학Ⅰ(3)
고급물리학Ⅱ(3)
고급화학Ⅰ(3)
고급화학Ⅱ(3)
고급생명과학Ⅰ(3)
고급생명과학Ⅱ(3)
고급지구과학(3)
자료구조(3)</td><td>12</td><td></td></tr>
<tr><td>정보</td><td>컴퓨터과학Ⅰ(2)
컴퓨터과학Ⅱ(2)</td><td>4</td><td>객체지향프로그래밍(3)</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>소계</td><td></td><td>48</td><td></td><td>26</td><td></td><td>5</td><td></td><td>12</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">계</td><td></td><td>79</td><td></td><td>40</td><td></td><td>19</td><td></td><td>16</td><td>154</td></tr>
<tr><td rowspan="4">연구활동</td><td colspan="2" rowspan="2">자율연구</td><td colspan="8">R&E Ⅰ(4), R&E Ⅱ(4)</td><td rowspan="2">20</td><td rowspan="4">26</td></tr>
<tr><td colspan="8">과제연구Ⅰ(4), 과제연구Ⅱ(4), 과제연구Ⅲ(2), 과제연구Ⅳ(2)</td></tr>
<tr><td colspan="2">현장연구</td><td colspan="8">자연탐사(2), 위탁 교육(2), 이공계체험학습(1)</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">졸업논문</td><td colspan="8">졸업논문연구Ⅰ(2), 졸업논문연구Ⅱ(2)</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="3" rowspan="2">창의적 체험활동</td><td>단체 활동</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="4">총120시간 이상</td></tr>
<tr><td>봉사 활동</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="4">총120시간 이상</td></tr>
</table>

영재학교 수학과 교육과정은 너무나 앞서가고 있습니다. 영재학교는 국가 수준의 교육과정을 전혀 사용하지 않고 자체로 제작한 수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 수학Ⅲ, 수학Ⅳ라는 교과서를 사용하고 있는데, 그 내용과 수준은 당연히 고교 1~3학년의 6과목의 수학 내용을 모두 포괄하면서 더욱 심화된 교재입니다. 그리고 국가 수준의 정규 교육과정에서 30단위에 이수하는 것을 15단위로 압축하여 운영하고 있습니다.

거기에다가 심화 필수 과목, 그리고 이후에 이어지는 선택과목으로 개설된 5과목(미적분학Ⅰ, 미적분학Ⅱ, 기초통계학, 정수론, 선형대수학)은 사실상 대학의 수학과에서 배우는 과목으로 대학 1~3학년에 배우는 전공과목입니다.

〈표 Ⅲ-15〉 한국과학영재학교의 자연계열 교육과정

② 자연계열(수학 · 과학) 교과 학점 배당표(소계 및 총계는 최소 이수학점)

<table>
<tr><th colspan="2">구분</th><th>수리정보</th><th>물리지구</th><th>화학생물</th></tr>
<tr><td colspan="2">필수과목 (100)</td><td>(고급)수학 I (4)
(고급)수학 II (4)
(고급)미적분학 I (4)
(고급)미적분학 II (4)*
프로그래밍 I (2)
프로그래밍 II (2)</td><td>물리학 및 실험 I (3)
물리학 및 실험 II (3)
일반천문학(3)
일반지구과학(3)**</td><td>화학 및 실험 I (3)
화학 및 실험 II (3)
생물학 및 실험 I (3)
생물학 및 실험 II (3)</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">소계</td><td>24 (수학 20, 정보 4)</td><td>9 (물리 6, 지구과학 3)</td><td>12 (화학 6, 생물 6)</td></tr>
<tr><td colspan="3">45</td></tr>
<tr><td rowspan="5">선택과목</td><td>교양선택
(200)</td><td>수학 III (3)
컴퓨터과학(3)</td><td>탐구물리학(3)
기초물리학(3)
천체관측의 기초(3)
지구환경과학(3)</td><td>탐구화학(3)
기초생명과학(3)</td></tr>
<tr><td>AP과목
(300)</td><td>(고급)미적분학 I (4)
(고급)미적분학 II (4)
(고급)미적분학 III (4)
기초정수론(3)
선형대수(3)
미분방정식(3)
객체지향프로그래밍(3)
이산구조(3)</td><td>일반물리학 I (4)
일반물리학실험 I (1)
일반물리학 II (4)
일반물리학실험 II (1)
일반천문학(3)
일반천문학실험(1)
일반지구과학(3)
일반지구과학실험(1)</td><td>일반화학 I (4)
일반화학실험 I (1)
일반화학 II (4)
일반화학실험 II (1)
일반생물학 I (4)
일반생물학실험 I (1)
일반생물학 II (4)
일반생물학실험 II (1)</td></tr>
<tr><td>심화선택
(400)</td><td>확률 및 통계(3)
수학세미나(1)
데이트구조 및 알고리즘 I (3)
데이트구조 및 알고리즘 II (3)
인공지능(3)
정보과학세미나(1)</td><td>현대물리학개론(3)
역사 속의 물리학(3)
물리학세미나(1)
날씨와 기후(3)
지구과학세미나(1)</td><td>물리화학(3)
유기화학(3)
분석화학(3)
화학세미나(1)
분자생물학(3)
세포생물학(3)
식물학(3)
생물학세미나(1)</td></tr>
<tr><td>특강과목
(500)</td><td>수학특강(3)
정보과학특강(3)</td><td>물리학특강(3)
지구과학특강(3)</td><td>화학특강(3)
생물학특강(3)</td></tr>
<tr><td>융합과목
(600)</td><td></td><td>우주과학 및 실습(3)
별과 우주(3)</td><td>생화학(3)</td></tr>
<tr><td colspan="2">소계</td><td colspan="3">28</td></tr>
<tr><td colspan="2">총계</td><td colspan="3">73</td></tr>
</table>

* (고급) 미적분학Ⅱ(4), (고급) 미적분학Ⅲ(4)은 필수과목이면서 AP과목임
** 일반천문학(3), 일반지구과학(3)은 둘 중의 한 과목을 선택하여 제4학기까지 필수로 이수해야 함.

〈표 Ⅲ-15〉에서 보면 한국과학영재학교의 필수 과목에 해당하는 수학과목에도 (고급)이라는 단서가 붙어 있어서 일반 고등학교 수학 과목보다 심화된 과목이라는 것을 알 수 있습니다. 그리고 (고급)미적분학을 Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ까지 이수합니다. 이미 필수 과목이 고등학교 수준을 벌써 넘어서서 대학교 1학년 교육과정까지 이른 것을 볼 수 있습니다. 거기에다가 선택과목으로 들어가면 교양선택으로 수학Ⅲ, AP 과목으로 기초정수론, 선형대수, 미분방정식, 심화 선택으로 확률 및 통계, 수학 세미나, 특강과목으로 수학특강이 개설되어 있는데 이들 과목은 서울과학고보다 더 상위에 있는 수학과 전공과목입니다.
서울대학교 기초교육원의 한 수학 전공 교수는 서울과학고등학교의 수학과 교육과정은 대학의 수학과 교육과정을 심하게 선행하고 있다고 했습니다. 수학의 본격적인 공부는 대학에 와서 해도 충분하며, 고등학교 수준에서 폭넓은 경험과 다양한 프로젝트 등을 해서 학생들의 잠재능력을 키우는 쪽으로 가는 것이 영재학교가 정상적으로 가는 길이라고 했습니다. 실제로 교육과정을 비교해 보아도 서울대학교 교양과정의 수학과 교과목보다 앞선 과목이 대부분입니다.
참고로 러시아의 영재학교인 라브렌띠예프 수학 물리 학교(노보시비르스크 국립대학교 부설 수학-물리 학교)[7]의 특징적인 교육과정 운영과 기본 원리를 살펴보면 다음과 같습니다.

> 첫째, 지나치게 일찍부터 전공 교과에만 매달리게 하지 않고 일반 교과내용들에 대해서는 일반 학교 교육과정의 모든 영역을 포함하도록 구성한다.
> 둘째, 교수-학습 방법은 대학의 체계와 최대한 근접한 형태로 이루어지지만 교육내용은 대학 과정과 중복되지 않도록 특별한 주의를 기울인다.

러시아의 영재학교의 경우 교육과정 편성 원칙으로 '교육과정은 가능한 한 자세히 다루고 대학교에서의 교육과정과 일치하는 부분은 중복되지 않도록 한다.'는 것은 우리나라 영재학교 교육과정 편성에 주는 시사점이 큽니다. 이들만을 위한 대학교가 별도로 있는 것이 아니라 일반 학생들과 대학에서 어울려서 같이 수업을 받아야 하는 학생들에게 대학교에서 배울 내용을 미리 공부하게 하는 것은 나중에 대학 교육에 주는 부담이 클 뿐만 아니라 시간 낭비가 될 수 있습니다.

---
7) 이희권(2009), 한인기(2000) 참조.

다. 영재 선발의 문제

각 시도교육청에서 운영하는 영재교육원이나 학교에서 운영하는 영재학급에서도 그 대상자를 선발할 때 관찰추천제만으로 하지 못하고 별도의 선발 고사를 치르고 있습니다. 그런데 이 선발 고사는 문제가 너무나 어렵고 경시대회 문제와 성격이 비슷해서 경시대회 대비 사교육을 유발하고 있습니다. 선발 과정에서 시험 출제를 한 때 금지하는 듯했지만 슬그머니 시험이 부활했습니다.

영재학교는 지필고사 등의 교과지식을 묻는 시험을 치르는 다단계 전형을 합니다. 모든 영재학교는 다단계로 입학전형을 실시하고 있습니다. 1단계는 서류 평가를 합니다. 기본적으로 지원자가 학교당 2,000명을 넘기 때문에[8] 서류 평가를 통해서 절반 이상을 탈락시키고 학교당 1,000명 내외의 인원을 선발합니다. 제출 서류는 모든 학교가 네 종류로, 입학원서와 학교생활기록부, 그리고 자기소개서와 교사추천서입니다. 자기소개서를 자기개발계획서라고 이름붙인 학교가 있고, 교사추천서를 관찰소견서라고 이름붙인 학교도 있지만 내용은 대동소이합니다.

2단계부터는 지필고사 및 면접 등의 평가가 이루어집니다. 영재학교마다 약간의 차이는 있지만 기본적으로 수학 · 과학 교과의 어려운 문제를 출제하고 있습니다. 2단계 지필고사는 숙박을 하지 않고 하루 안에 마치며, 채점을 해서 3단계 캠프를 운영할 수 있는 정도로 인원을 줄이는데, 대개는 모집정원의 2배수인 200명 내외를 선발합니다. 2단계의 명칭에서 찾을 수 있는 공통점은 '창의적 문제해결능력 검사'이며, 구체적으로는 '중학교 교육과정의 수학 · 과학에 대한 지식을 바탕으로 영재성 및 종합적 사고력 등을 평가'하는 것으로 설명하고 있습니다. 문제가 어렵기는 해도 선행학습을 유발한다는 지적을 피하기 위해 중학교 교육과정의 바탕이라는 것을 명시하는 학교가 많으며, 창의성과 영재성을 측정한다고 규정하면서 수학 · 과학의 문제를 출제하여 시험을 치르고 있습니다.

3단계 명칭은 다양하지만 캠프를 운영하는 면에서 일치합니다. 숙박을 하면서 이루어지기 때문에 캠프라고 하며, 인원이 적으니 정밀하게 전형을 진행하는데, 여기서도 또 다시 지필고사가 이루어집니다. 그리고 3단계의 문제가 대체적으로 2단계보다 훨씬 어려운 문제가 출제됩니다. 3단계의 명칭에서 찾을 수 있는 공통점은 '영재성 캠프'이며, 구체적으로는 '탐구능력과 잠재성, 가능성을 평가'하는 것으로 설명하고 있습니다. 2단계와 달라진 점은 인성면접을 포함하고 있다는 점입니다.

---

8) 2015학년도 입학전형에는 6개 영재학교에 11,541명이 지원했는데, 광주과학고는 정원의 절반인 45명만 전국단위로 선발하기 때문에 813명에 그친 것을 생각하면, 5개 영재학교는 각각 2,000명이 넘는 지원자가 몰렸다. 아직 영재학교는 이중지원을 허용하고 있다.

다음 〈표 Ⅲ-16〉은 2015학년도 전국의 영재학교 입학전형 방법을 정리한 것입니다.

〈표 Ⅲ-16〉 2015학년도 전국 영재학교 전형 방법

학교명	1단계	2단계	3단계
경기과학고	서류평가 – 입학원서 – 학교생활기록부 – 자기소개서 – 추천서	영재성검사 – 중학교 교육과정의 수학 · 과학에 대한 교과지식을 바탕으로 융합적 사고 및 창의적 문제해결력 등을 평가	영재성캠프 – 창의연구설계 및 해석, 발표 및 토론능력 등을 평가 – 면접을 통해 인성, 과학적 탐구능력 등을 평가
광주과학고	서류평가 – 입학원서 – 학교생활기록부 – 자기개발계획서 – 추천서	영재 소양평가 – 수학 · 과학 분야의 적성, 창의, 수학능력 등 영재 소양 능력을 종합적으로 평가	영재성 다면평가 – 과학캠프를 통하여 글로벌 융합 과학인으로서의 자질과 잠재성을 종합적으로 평가
대구과학고	서류평가 – 입학원서 – 학교생활기록부 – 자기소개서 – 추천서	창의적 문제해결력 평가 – 중학교 교육과정의 수학 · 과학에 대한 지식을 바탕으로 영재성 및 종합적 사고력 등을 평가	과학 창의성 캠프 – 수학 · 과학에 대한 잠재능력 및 창의성 등을 종합적으로 평가
대전과학고	서류평가 – 입학원서 – 학교생활기록부 – 자기소개서 – 추천서	창의적 문제해결능력 검사 – 중학교 교육과정의 수학 · 과학에 대한 지식을 바탕으로 창의적 문제해결능력을 검사	인성면접, 과학영재캠프 –인성면접: 수학(受學) 가능성 및 인성 등을 평가 –과학영재캠프: 탐구역량, 내적역량, 영재성 등을 종합적으로 평가
서울과학고	서류평가 – 입학원서 – 학교생활기록부 – 자기소개서 – 관찰소견서	영재성 및 사고력 검사, 창의성 · 문제해결력 검사 – 영재성 및 사고력 검사: 수학 · 과학에 대한 적성, 언어이해력, 수리능력 등 평가 – 창의성 · 문제해결력 평가: 창의성, 문제해결력, 종합적 사고력 등 평가	과학영재캠프 –과제수행능력평가, 면접 평가 등으로 창의성, 과학적 탐구력과 인성 및 리더십 등을 종합적으로 평가
한국과학 영재학교	서류평가 –입학원서 –학교생활기록부 –자기소개서 –추천서	창의적 문제해결력 평가 – 학생기록물, 창의적 문제해결력평가 등을 종합적으로 평가	영재성 다면 평가 – 글로벌 과학자로서의 자질 및 잠재성을 평가

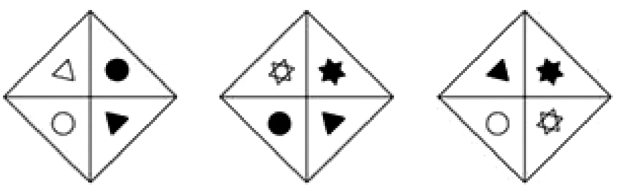
모든 영재학교는 입학전형에서 지필고사가 주된 평가요소가 됩니다. 영재학교의 창의적 문제해결력 평가의 수학 · 과학 문제를 보면 대부분 수학 · 과학 올림피아드[9] 문제와 유사합니다. 즉, 창의성 또는 영재성을 평가한다는 명분 아래 중학교의 정상적인 교육과정으로는 도저히 해결할 수 없는 문제들로 구성되어 오랫동안[9] 훈련을 받지 않은 학생들은 탈락할 수밖에 없는 상황입니다.

홈페이지에 공개된 서울과학고등학교의 2014학년도 입학전형 기출 문제의 예시를 보겠습니다.

2단계 영재성 검사에 출제된 수학 문제가 몇 개인지는 모르나 그 중 하나만 공개했고, 3단계 창의성 · 문제해결력 검사에 출제된 수학 문제도 하나만 공개했습니다. 다음 [그림 Ⅲ-17]은 2단계 영재성 검사 공개 문항입니다.

[그림 Ⅲ-17] 서울과학고 2014학년도 영재성 검사 기출문항

13. 정팔면체의 각 면에 도형이 하나씩 그려져 있다. 이때 7가지의 도형 중 어느 한 도형만 두 번, 나머지 도형은 한 번씩 그려져 있다. 다음은 이 정팔면체를 돌려 가며 본 세 가지 모습일 때, 두 번 그려진 도형은?



① ○ ② ▲ ③ ●
④ ✶ ⑤ ✡

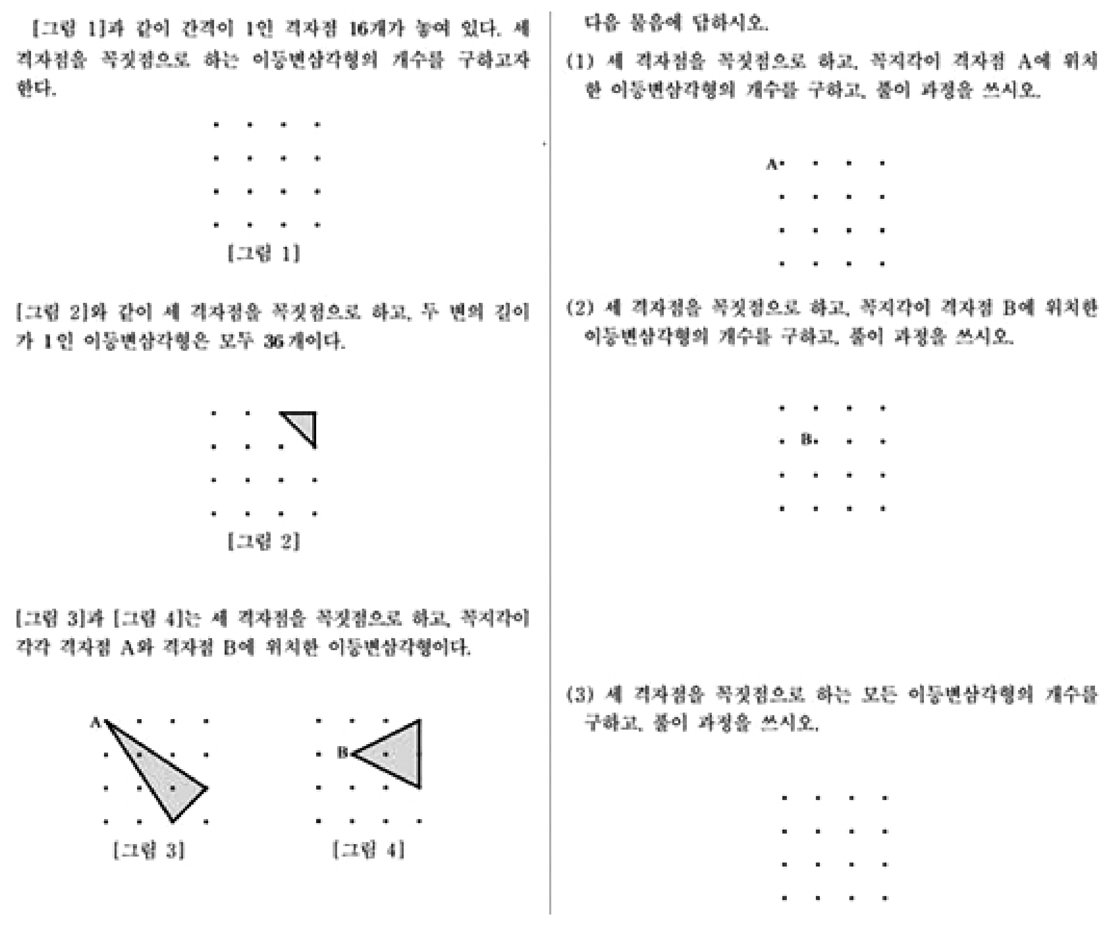
9) 수학 올림피아드 시험은 국내에서 대한수학회가 주관하여 치러지는 한국수학올림피아드(KMO)와 국제수학올림피아드(IMO)가 있다. 이 시험 문제의 출제 영역은 학교의 정상적인 교육과정과는 무관하게 정수론과 기하학, 함수론, 조합론, 부등식 등에서 출제된다.

10) 지금도 서울 대치동에서 영재학교 전문 학원을 운영하는 학원장의 증언에 의하면 영재학교를 입학하는 시험 준비를 한 마디로 '마라톤'이라고 비유했으며, 이 마라톤은 초등학교 4학년부터 중학교 3학년까지 계속되며 여학생들은 대부분 중도에 포기하는 경우가 많다고 한다. 현재 영재학교 재학 중인 여학생의 증언에 의하면 초등학교 4학년에 시작되는 영재교육원의 경우 초등학교 5학년까지 남녀 비율이 거의 1 : 1이었다가 초등학교 6학년이 되면서 국제중학교로의 진로 변경으로 남녀 비율이 3 : 1 내지는 4 : 1로 바뀐다고 한다.

정팔면체 자체는 중1에서 다루는 정다면체 중 하나입니다. 그런데 중1에서 다루는 정팔면체의 성취 기준은 면의 개수나 꼭짓점, 변의 개수 사이의 관계 정도입니다. 그런데 이 문제는 정팔면체를 서로 다른 세 면에서 봤을 때 각 면에 그려진 모양을 보고 전체 면에 그려진 모양을 생각해 낼 수 있는지를 평가하고 있습니다. 정보를 조합하여 원래의 입체도형의 모양을 상상하는 능력은 공간 지각력을 필요로 하며 평소에 여러 가지 입체도형을 교구로 이용한 별도의 교육을 받은 학생이 아니면 생각해내기 어려운 문제입니다. 이런 문제를 중학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이 충분히 풀 수 있다고 영재학교 입학 설명 자료에서 주장하는 것은 이해할 수 없습니다.

다음 [그림 Ⅲ-18]은 3단계 창의성 · 문제해결력 검사 공개 문항입니다.

[그림 Ⅲ-18] 서울과학고 2014학년도 창의성 · 문제해결력검사 기출문항


[그림 1]과 같이 간격이 1인 격자점 16개가 놓여 있다. 세 격자점을 꼭짓점으로 하는 이등변삼각형의 개수를 구하고자 한다.

[그림 1]

[그림 2]와 같이 세 격자점을 꼭짓점으로 하고, 두 변의 길이가 1인 이등변삼각형은 모두 36개이다.

[그림 2]

[그림 3]과 [그림 4]는 세 격자점을 꼭짓점으로 하고, 꼭지각이 각각 격자점 A와 격자점 B에 위치한 이등변삼각형이다.

A

B

[그림 3] [그림 4]

다음 물음에 답하시오.

(1) 세 격자점을 꼭짓점으로 하고, 꼭지각이 격자점 A에 위치한 이등변삼각형의 개수를 구하고, 풀이 과정을 쓰시오.

A

(2) 세 격자점을 꼭짓점으로 하고, 꼭지각이 격자점 B에 위치한 이등변삼각형의 개수를 구하고, 풀이 과정을 쓰시오.

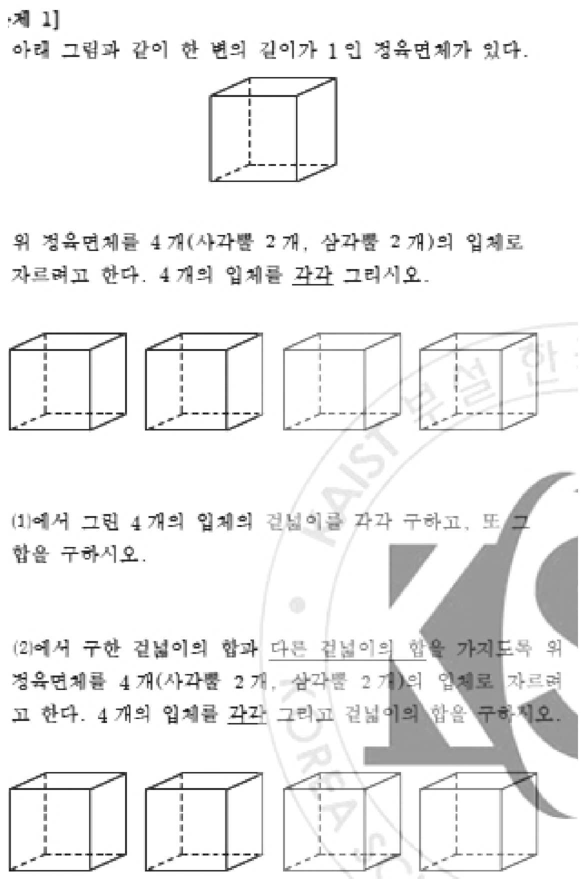
B

(3) 세 격자점을 꼭짓점으로 하는 모든 이등변삼각형의 개수를 구하고, 풀이 과정을 쓰시오.

이등변삼각형은 중2에서 다룬다. 중2에서 다루는 이등변삼각형은 두 밑각의 크기가 같다거나 꼭지각의 이등분선이 밑변을 수직이등분하는 성질 정도를 이해시키는 정도입니다. 그러나 이 문항은 이등변삼각형의 작도 과정을 이해하고, 이등변삼각형의 성질을 이용하여 경우의 수를 세는 것을 요구하고 있습니다. 결국 이등변삼각형의 순수한 성질을 묻는 문제가 아닌 경우의 수와 같은 올림피아드 시험 대비로 조합론을 공부한 학생들에게 익숙한 문제를 출제하고 있는 것입니다.

다음 [그림 Ⅲ-19]는 KAIST부설 한국과학영재학교 홈페이지에 공개한 2014학년도 신입생 선발 제2단계 창의적문제해결력검사 수학 과목의 기출문항입니다.

[그림 Ⅲ-19] 한국과학영재학교 2014학년도 창의적문제해결력검사 기출문항


제 1]
아래 그림과 같이 한 변의 길이가 1 인 정육면체가 있다.

위 정육면체를 4 개(사각뿔 2 개, 삼각뿔 2 개)의 입체로 자르려고 한다. 4 개의 입체를 각각 그리시오.

(1)에서 그린 4 개의 입체의 겉넓이를 각각 구하고, 또 그 합을 구하시오.

(2)에서 구한 겉넓이의 합과 다른 겉넓이의 합을 가지도록 위 정육면체를 4 개(사각뿔 2 개, 삼각뿔 2 개)의 입체로 자르려고 한다. 4 개의 입체를 각각 그리고 겉넓이의 합을 구하시오.

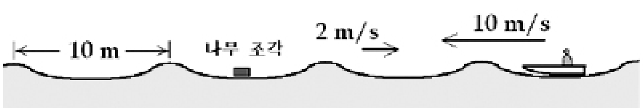
단순한 정육면체 문제같이 보이지만 이 정육면체를 사각뿔 2개와 삼각뿔 2개로 잘라서 나오는 입체를 그리고, 그 각각의 겉넓이를 구하는 문제입니다. 또한 처음 방법과는 다른 겉넓

이의 합을 가지도록 정육면체를 또 자르라고 하는 문제입니다. 중학교에서 정육면체를 다루는 것은 중3의 피타고라스 정리를 포함해도 대각선의 길이를 구하는 정도입니다. 교육과정에는 정육면체를 자르는 입체도형의 분할이 없습니다. 따라서 이런 종류의 문제는 사교육에서 훈련된 학생들에게 유리하며, 학생들은 이런 문제를 해결하기 위해 사교육의 도움을 반드시 필요로 합니다.

영재학교는 수학 문제뿐만 아니라 과학 문제도 지나치게 난이도가 높습니다. 다음 [그림 Ⅲ-20]은 2009학년도 3단계 과학1에 나온 물리 문제입니다. 이 문제의 딸린 문항 (3)의 문항 형태는 (1)과 (2)를 이용하여 풀 수 있는 것처럼 보이나, 실제로는 고등학교 물리에서 다루는 '도플러 효과' 문제입니다. 따라서 도플러 효과를 조금이라도 알고 있는 학생은 (1)과 (2)의 문항을 풀어내느냐의 여부에 관계없이 (3)을 쉽게 풀 수 있습니다. 하지만 도플러 효과를 모르는 학생은 이 문제를 (1)과 (2)로부터 논리적으로 연관 지어 풀거나 아니면 경험으로부터 생각해서 풀어야 하는 불리한 측면이 있습니다. 이러한 문제는 선행학습을 전제로 한 문제의 한 예로 볼 수 있습니다.

[그림 Ⅲ-20] 서울과학고 2009학년도 3단계 물리 문항예시

2. 어떤 등대에서 바라보았을 때, 마루의 간격이 10 m인 파도가 2 m/s의 속력으로 오른쪽으로 진행하고 있다. 그리고 같은 등대에서 바라보았을 때, 영희가 탄 보트는 10 m/s의 속력으로 왼쪽으로 달리고 있다.



(1) 바다에 떠 있는 나무 조각이 위아래로 한 번 진동하는 데 걸리는 시간과 그 진동수를 구하시오. [2점]

(2) 영희가 탄 보트가 파도의 마루에서 다음 마루까지 가는 데 걸리는 시간을 구하시오. [4점]

(3) 철수가 차를 타고 일정한 속력으로 가고 있는데, 도로 옆 건물에 불이 나서 비상벨이 울리고 있다. 철수가 건물에 가까워지고 있을 때와 건물로부터 멀어지고 있을 때 듣게 되는 비상벨 소리의 차이를 비교하고, (1)과 (2)의 결과를 이용하여 그 이유를 설명하시오. [5점]

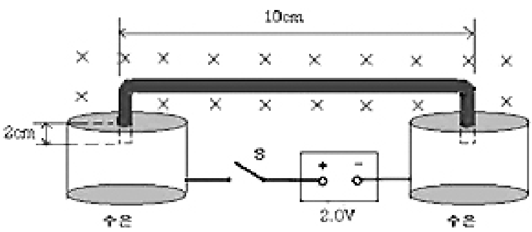
또한 2009학년도 서울과학고 4단계 심층면접 평가 문제는 다음 [그림 Ⅲ-21]과 같습니다. 이 문제를 풀어야 했던 2008년에 중3인 학생은 중학교 교육과정에서 '부력'을 배우지 않았습니다. 이 학생들에게서는 초등학교에서 '물속에서의 무게와 압력'이라는 단원에서 '물체가 물속에 있을 때는 무게가 작아진다'는 정도로 배운 것이 부력에 관한 지식의 전부인 것으로 생각해야 합니다. 그런데 이 문제에서는 처음 도선이 수은 속에 잠긴 상황에서 부력을 정량적으로 '부력=ρgV'의 식을 써서 구할 것을 요구하고 있습니다. (물론 나중 상태에서 공기에 의한 부력은 무시하고 있지만…)

또한 이 문제는 $F=B\times I\times L$을 이용하여 자기장 속에 놓인 도선이 받는 힘의 크기를 정량적으로 구해야만 하는데 비록 구하는 식이 주어졌다고는 하지만, 이는 중학교 교육과정을 벗어났습니다. 중학교 교육과정에서는 자기장의 세기 T를 배우지 않고, 자기력의 방향만 다루고 있기 때문입니다.

또한 이 문제는 힘의 평형, 부력 구하기, 자기력 구하기, 에너지 보존 등 많은 상황을 복합적으로 묻고 있어서 중학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이 이 모든 것들을 연결하기 매우 어려운 문제입니다.

[그림 Ⅲ-21] 서울과학고 2009학년도 4단계 물리 심층면접 문항예시

5. 그림과 같이 질량이 5×10^{-3} kg이고 수평 부분의 길이가 10 cm인 구부러진 도선의 양끝이 수은의 표면 아래로 각각 2 cm씩 잠겨 있다. 세기가 0.005 T인 균일한 자기장이 도선과 수직으로 시험지 안쪽 방향으로 들어간다. 용기속의 수은과 2.0 V의 전원장치와 스위치 S는 도선으로 연결되어 있고, 스위치 S를 닫으면 도선 끝은 처음 위치에서 위쪽으로 60 cm까지 올라간다. (단, 중력가속도는 10 m/s² 이고, 부력과 마찰력은 무시한다.)



※ 참고 사항 : 자기장의 세기(B)가 균일한 공간에서 길이가 L인 도선에 전류(I)가 흐를 때 도선에 작용하는 자기력(F)의 세기는 $F=B\times I\times L$이다.

(1) 도선이 수은 면에서 떠나는 순간 도선의 속력을 말하시오.[3점]

(2) 스위치를 닫는 순간부터 도선이 수은 면에서 떨어질 때까지 도선에 흐르는 전류(I)가 일정하다고 가정할 때, 전류의 세기(I)를 말하시오.[4점]

홈페이지에 공개한 문제가 이 정도라면 공개하지 않은 나머지 문제의 성격이나 난이도는 말할 것도 없을 것입니다. 홈페이지에 공개하는 문제는 공개로 인한 시비 거리가 없는 무난한 것을 골랐다고 판단하면 전체적인 문제의 난도나 성격은 절대로 별도의 교육 없이 혼자서 자기 재능을 개발하여 해결할 수 있는 문제들이 아닙니다.

이렇듯 지필고사를 이용하여 시험을 치르는 입학전형을 통해서는 자기 주도적으로 자라나서 장래성과 잠재력을 가진 진정한 영재를 선발하기보다는 초등학교에서부터 사교육의 훈련을 받을 수 있고, 그런 여건과 환경이 되는, 일종의 만들어진 학생들을 선발할 수밖에 없습니다. 영재학교도 과학고와 마찬가지로 자기주도 학습전형을 전격적으로 도입해서 입학전형에 교과 지식을 묻는 지필고사를 제외해야 합니다.

영재학교 수학 · 과학 문제는 교과지식을 묻고 있으며 변형된 경시대회 형태의 지필고사 그 자체입니다. 이런 유형의 문제를 해결하기 위해서는 사교육을 받아야 하기 때문에 영재학교 대비 사교육 시장은 줄어들지 않고 있습니다.

라. 영재학교 출신 의대 진학의 문제

영재학교 졸업생들이 의대 진학을 선호하는 현상은 좀처럼 줄어들지 않고 있습니다. 유기홍 국회의원의 2014년 10월 보도 자료에 의하면 영재학교의 의약계열 진학은 상당히 높습니다. 최근 5년간 영재학교에서 대학에 진학한 학생은 1,568명이었고, 이공계 진학률은 92.0%(1,442명), 의약계 진학률은 7.7%(121명)였습니다.

〈표 Ⅲ-17〉 최근 5년간 영재학교 졸업생 대학 계열별 진학 현황

학년도	졸업자수	진학자수	계열별 진학자수				
			이공	의예	인문사회	기타	계
2010년	281	278	264	14	0	0	278
2011년	197	193	180	13	0	0	193
2012년	237	235	211	22	1	1	235
2013년	392	382	343	36	3	0	382
2014년	501	480	444	36	0	0	480
계	1,608	1,568		121(7.7%)	4(0.3%)	1(0.1%)	1,568

영재학교 중 서울과학고 졸업생의 의약계열 진학률은 17.6%로 다른 학교에 비해 월등히 높았습니다. 서울과학고는 영재학교 중 가장 선호도가 높아서 최고의 영재들이 입학한다고 자타가 인정하고 있는 학교입니다. 이런 학교의 졸업생 중 이공계 영재 육성을 위한 영재학교 설립 취지와 국가적인 지원에도 불구하고 이공계열로 진학하지 않고 의약계열로 진학한 것에 대해서 3년간의 교육비를 환수하고 졸업 자격을 박탈해야 한다는 의견도 나오고 있습니다.

한편 일부 영재학교가 의대 진학을 원하는 학생에게 교사추천서를 써주지 않는다는 방침을 천명하고 있지만, 이 역시 영재학교 학생들을 선호하는 대학 일부가 교사추천서가 없이도 원서를 받아주고 있어서 효력을 발휘하지 못하고 있다는 지적도 있습니다. 경찰대학 졸업이후 경찰근무를 하지 않을 경우 4년간 학비와 지원금 일체를 반환하는 것 같은 제도적 보완책이 필요합니다. 대학 역시 학교장이나 교사추천서가 없는 특기자전형으로 영재학교 과고 출신의 의대행을 부추기는 이기심을 버려야 합니다.

마. 공교육과 사교육의 범주를 넘나드는 수학 경시대회

최근 학교생활기록부에 학교 외부의 수상 실적 기록이 금지된 이후 두드러진 변화는 각종 교내 대회가 우후죽순으로 열린다는 것입니다. 교내 수학경시대회는 이전에 1년에 한 번 정도 치르기도 하고 아예 없는 학교도 있었지만, 최근에는 1년에 두 번 치르는 것이 대세가 되었습니다. 수학 과목만 그러는 것이 아니라 전 교과가 모두 그렇게 변해서 이른바 경시대회의 시대라고 할 수 있습니다.

여기에 교육부는 올해 들어 교과 이름의 경시대회를 개최할 수 없도록 지시했다가 다시 교과 이름의 경시대회를 허용하되 참가 인원수나 시상자 수를 조절하는 선으로 후퇴했습니다.

수학 경시대회 문제를 보면 사교육 업체가 운영하는 경시대회 문제와 유사합니다. 따라서 사교육을 통하지 않는 학생들은 입상조차 어렵습니다. 경시대회 문제를 대비하는 사교육을 받지 않는 학생들은 주어진 시간 안에 도저히 풀 수 없는 높은 수준의 문제와 많은 양의 문제가 주어지고 있기 때문입니다.

수학경시대회는 해당 학년에 알맞은 문제를 출제하여 수학적으로 재능이 우수한 학생들을 선발하여 격려와 후원을 통해 그들이 우리나라뿐만 아니라 인류에 공헌하도록 돕는 데 큰 목적이 있을 것입니다. 그런데 수학경시대회에 출제되는 문제들은 해당 학년을 뛰어 넘어 선행학습을 하지 않으면 풀 수 없을 정도의 문제들을 제시하고 있으니, 학생들로 하여금 소위 '수학경시 대비학원' 이라는 사교육 업체를 찾아 선행학습을 하도록 강요하는 결과를 초래하

였으며, 공교육을 붕괴시키는 데 앞장서고, 사교육을 육성하는데 가장 큰 공헌을 하였다는 비판을 받게 되었습니다. 결과적으로 그것은 학생들과 학부모들에게 수학교육을 잘못하도록 인도하면서 피해를 주고 있습니다.

5. 법률 제정과 예산 지원

교육부는 수학교육 종합 계획을 통해서 체험과 탐구 중심으로 수업을 이끌도록 하고, 선ㄷ형 평가에서 벗어나 풀이과정에 독창성이 있는지(과정 평가)를 보겠다고 했습니다. 방향은 올바르다고 할 수 있습니다. 과정 중심 평가가 중요하기 때문입니다. 하지만 걸림돌이 있습니다.
현재 국민들이 학교를 뒤흔드는 현실에서 결과만을 평가하는 지필고사 외에 체험이나 탐구 과정을 평가했을 때 민원을 제기할 것이 뻔합니다. 그 결과 교사들은 과정 평가를 하지 못하고 있습니다. 지금도 수행평가를 하도록 권장 내지는 의무화하고 있습니다만 대부분 형식적으로 이루어지고 있습니다. 이러한 민원 제기가 가능한 것은 교사들의 평가권을 인정하지 않는 교육부나 교육청, 관리자 때문입니다. 교사들의 과정 평가에 대한 권한을 인정하자는 시민들의 합의와 법적인 보호 장치를 시급히 마련해야 합니다.

수학교육에 대한 예산이 너무나 부족합니다. 독일에서는 PISA 결과에 대한 철저한 분석 작업을 통한 개혁 방안 등이 활발하게 논의되었으며, 그것을 바탕으로 연방정부 차원에서 개혁 작업을 추진했고 엄청난 예산을 투입했습니다. 이에 반해 우리나라는 PISA 결과의 순위에 자족하는 분위기였으며, 심지어 PISA 결과가 발표되면서 ‘지면과 방송을 통해 우리 중등교육 성취에 대한 긍정적 평가와 함께 공교육 전반에 대해 팽배해 있던 비판’(정혜영, 2009)을 무마시키는 기회로 이용되기도 했습니다.
특히, 수학은 인지적인 성취 순위가 최상위권을 계속적으로 유지하고 있어 자랑거리로만 삼고 있을 뿐 그 이면에 있는 사교육의 고통과 공교육 내에서의 경쟁 문제는 계속 감춰지고 있습니다. 정부는 쓸모 있는 정책을 펼치지 않고 있습니다. 그것은 한 마디로 예산을 통해 알 수 있습니다. 수학교육 선진화 방안에 3년 동안 투입된 예산이 겨우 100억을 약간 넘을 정도이며, 이번에 발표한 수학교육 종합 계획은 예산조차 나와 있지 않아서 알 수는 없지만 올해는 10억 남짓의 예산으로 몇 가지 사업을 하는 시늉만 내고 있을 뿐입니다.
전국의 모든 학교와 학생들을 대상으로 한 정책에 1년 동안 겨우 몇 십억 정도를 투입하면서 정부의 ‘종합 계획’이라고 주장하는 것은 규모가 맞지 않습니다. 안심 대출 정책에 순간적으

로 쏟아 부은 40조 예산을 생각하면 수학교육에 대해서 정부가 어느 정도 배려하는지를 짐작할 수 있습니다. 독일은 PISA에서 뒤처지는 학생들을 위한 전일제학교 운영의 한 가지 사업에만 5년간 40억 유로를 연방정부에서 지원했습니다(정혜영, 2009). 그리고 국가 차원의 평가 표준 설정 및 평가 시스템 구비 작업은 상당한 경비가 드는 작업이라는 점에서 볼 때 대단한 결단으로 보입니다. 이외에도 180개의 수업 혁신학교를 지정하여 수학 · 과학 교사들의 수업 개선 프로그램(SINUS)을 운영하였고, 그 결과를 전국으로 확대 · 보급하였습니다.

독일 정부는 저조한 성적의 가장 중요한 원인으로 독일 교육체제에 문제가 있다고 진단했으며, 특별히 지원의 부족함을 지적했던 것입니다. 학생들의 낮은 학업성취도의 책임을 개별 학교나 교사, 학생 자신에 돌리기보다는 보다 근본적으로 국가 전체차원에서 교육체제 자체의 문제로 보고 이에 대한 해결 방안으로서 학생들에 대한 지원의 중요성을 강조하고 여러 가지 대응방안을 제시했던 것입니다.

우리나라의 경우 학생들의 낮은 학업성취 문제에 대해서 문제의 근원을 교육체제 자체에서 찾기보다는 개별학교나 교사, 또는 학생 개인에게 책임을 돌리고자 하는 경향이 없지 않은가 생각하며, 더더욱 국가 차원의 평가 시스템 도입을 통해 학생과 교사 개인간, 학교간, 지역간 경쟁을 부추김으로써 해결하려고 하지는 않았는가를 돌아보게 됩니다.

독일뿐만 아니라 세계 각국은 21세기 들어와서 수학 · 과학 분야의 교육에 엄청난 관심과 예산을 쏟아 붓고 있습니다. 우리나라도 과학교육에는 상당한 예산이 편성되고 있지만 유독 수학교육에만 예산이 없습니다. 수학교육은 아직도 교과서와 칠판, 그리고 분필만 있으면 된다고 생각하고 있는 듯합니다. 국제적인 수학과 교육과정에서 강조하는 소프트웨어 등 공학도구의 사용을 위한 지원은 전혀 없습니다.

제2차 수학교육 종합 계획에는 수학교육 발전을 위한 법적 토대를 마련하기 위해 '수학교육진흥법'을 2018년에 법제화할 예정이라고 합니다. 이 법이 가지고 있는 두 가지 문제점을 지적합니다. 하나는 지금 수학교육이 과도해서 사회 · 경제적 물의를 빚고 있는 상황에서 왜 '진흥(법)'이어야 하는가 하는 명칭의 문제와 현 정부의 임기가 아닌 2018년까지 미뤄야만 하는가의 시기 문제입니다.

두 가지 문제점을 보면 과연 현 정부가 수학교육의 문제를 제대로 인식하고 있는지, 그리고 그것을 해결할 의지가 있는지를 의심하게 합니다. 이것은 국민들의 고통을 해결하고자 하는 정부의 시의적절하고 책임 있는 태도가 아닙니다. 수학교육의 문제가 시급하고 수학으로 인한 국민들의 고통을 가슴깊이 인식하지 못한 탓입니다. 4년 동안이나 더 참고 기다려야 합니다.

교육부는 지금 이런 엄청난 문제점을 앞에 두고 수학교육정책 담당자 한 명에게만 이 일의 책임을 맡기고 있습니다. 국민들의 수학 고통은 그렇게 느긋하지 않습니다. 수능을 담당하는 대입제도과를 비롯한 교육부의 전 부서가 국민들의 수학 고통 해결을 위해, 수학 포기자

를 양산하는 수학교육의 정상화를 위해 머리를 맞대고 책임 있는 정책을 시급하게 내놓아야 합니다.

지금 수학교육은 진흥이 안돼서 문제가 되는 것이 아니라 비정상이 문제입니다. 그래서 '수학교육진흥법'이 아니라 '(가칭)수학교육정상화법'을 올해 안에 제정해야 합니다. 그래서 교육과정이 정상적으로 운영될 수 있도록 설명식 위주의 교수 · 학습 방법을 개선하고 결과 위주의 선다형 평가를 과정 중심 평가로 전환하는 것을 법제화해서 모든 수업과 평가에 적용해야 합니다. 국민들은 교사들의 평가권을 겸허하게 받아들이고, 소신을 갖고 학생을 평가할 수 있도록 교사를 보호할 수 있는 장치를 법적으로 마련해야 합니다.

Ⅳ. 각론 일부 세부 사항

1. 영역 통합 지도 방식에 대한 제안

가. 영역 통합 지도의 필요성

국제적으로 우리나라의 수학 학습 내용은 적지 않은 편이다. 나라마다 제도가 달라서 일률적으로 비교하기는 무리가 있지만, 내용으로만 비교해볼 때 중학교까지는 명백하게 우리나라가 가장 많은 내용을 가르친다. 더군다나 수학 교과가 전체 교육과정에서 차지하는 비율은 국제 평균에 비해 적은 편이다. OECD 국가들의 초등학교 수학 시수 비율 평균은 17%인데 우리나라의 수학 시수 비율은 14%이고, OECD 국가들의 중학교 수학 시수 비율 평균은 13%인데 우리나라의 수학 시수 비율은 11%이다(한국교육과정평가원, 2013).
현재 수학 시수를 늘릴 수 없다면 가르치는 내용을 줄여야 하는 것이 당연하다. 수학 시수 비율을 본다면 학습 내용이 국제 표준보다 적어야 하는 것이 맞다. 이는 교육과정에서 추구하고 있는 학생 스스로 생각할 수 있는 기회를 주는 다양한 수업 방법과 평가를 위해서라도 꼭 필요한 일이다.
학습의 양이 문제가 아니라 수학이 왜 필요한지, 수학을 공부하면 어떤 이점이 있는지 등을 충분히 설명하고, 학생들이 스스로 개념을 발견하게 하는데 많은 시간과 노력을 쏟아야 한다. 학생의 수학적 사고력이 향상되면 수학을 왜 배우는지, 수학이 왜 필요한지를 스스로 깨달을 수 있으므로 수학을 싫어한다든가 수학에 대한 부정적인 태도가 줄어들 것이다. 현재의 학습 내용 요소 중 필수 핵심 요소를 선정하여 깊이 있게 가르치는 방안이 필요하다. 많은 내용을 주마간산(走馬看山) 격으로 가르치기보다는 핵심 내용을 선정하고 많은 시수를 할애하여 다양한 방법으로 학생 스스로 이해할 수 있는 기회를 충분히 주어 확실하게 이해를 시키면 나머지 학습 내용에 대해서도 전이(轉移) 학습의 효과가 나타나서 효율적인 수학 학습이 이루어질 것이다.

우리나라 수학 교과서의 한 단원을 보면 최종적인 학습목표에 도달하기 위한 세부적인 하위 요소들을 개별적으로 배우는 과정을 거쳐 배우고자 하는 것이 나중에 나온다. 즉, 전체를 이루는 10개의 부분이 있다면 10가지를 따로 따로 배운 뒤에 합쳐서 전체를 이해할 수 있다는 방식이다. 하지만 이런 백화점식 나열은 학습의 깊이를 옅게 하는 결과를 초래한다. 초등학교에서는 수학의 기초로서 전반적인 학습이 필요하다고 볼 수 있으므로 현재의 상태가 적당할 수 있다. 하지만 중학교부터는 논란의 여지가 많다.

이러한 문제를 해결하기 위한 방안은 우리나라 2009 개정 교육과정의 고등학교 과정에서도 찾을 수 있었다. 2007 개정 교육과정때 보다 진일보한 것은 고등학교에서 연산 영역에 해당하는 내용을 연산이 필요한 영역의 하위 요소로 통합했다는 것이다. 여러 영역 및 과목에 흩어져 있던 동일 주제의 내용을 통합하고 연결성을 강화시킴으로써 불필요하게 복잡한 계산의 양을 대폭 줄이고 각 주제들이 왜 등장하게 되었는지 근본적인 물음에 답할 수 있게 되었다. 이러한 과정을 통하여 자연 현상과 사회 현상을 이해하고 기술하는 데에 수학이 왜 필요하고 유용한지 학생들이 체험하고 그 가치를 인식하도록 노력했다는 점을 말하고 싶다.
아쉽게도 초등학교와 중학교 교육과정이나 교과서에서는 아직 이러한 시도를 찾을 수 없었다. 초등학교 수학, 중학교 수학 및 고등학교 수학 Ⅰ과 수학 Ⅱ에 아직도 독립적으로 존재하는 영역 중 수와 연산 영역, 문자와 식 영역은 과감하게 그 연산이 필요한 영역으로 통합해야 한다. 복잡하고 지루한 연산 영역과 문자와 식 영역을 함수 영역에 통합하면 계산 위주의 학습 내용의 요소가 저절로 축소됨과 동시에 내용 및 주제 간의 연결성이 강조되므로 수학의 필요성에 대한 설득이 쉬워져서 학생들의 수학에 대한 긍정적인 태도가 길러질 것이다. 아울러 정의적인 영역의 수학 성취도 또한 끌어올릴 수 있을 것이다.

나. 영역 통합 지도의 근거

프로이덴탈은 함수, 그래프, 방정식을 대부분의 교과서에서 서로 다른 장으로 분리하여 다루는데, 이들 학습 영역 역시 연결되어야 한다고 주장하였다(우정호 외, 2008, 162-163). 연결성보다 계열성을 추구하는 것은 계통학이 기존의 학문보다 사후에 발전되었음을 잊은 것이라고 비판하면서 이러한 내용들은 교수학적으로 잘 조직될 수 있다고 주장하였다.

대수 영역을 통합하여 가르치려는 시도는 이미 2009 개정 교육과정에 있었다. 다음은 이와 관련된 교육과정의 내용이다.

(2009 개정 교육과정에서) 현행 수학과 교육과정은 수학을 대수, 기하, 해석이라는 고전적인 틀 안에서 분류하고 이에 맞추어 내용을 구성함으로써, 하나의 주제가 여러 단원에 걸쳐 다루어지고 그 결과 학생들의 학습량이 불필요하게 증가하는 측면이 있다. 예를 들어 이차식, 이차방정식, 이차부등식, 이차함수, 이차곡선을 대수, 해석, 기하 영역에서 각각 따로 다룸으로써 그 연관성이 명료하게 드러나지 못하고 학습량은 불필요하게 증가함을 알 수 있다.
(중략)

이러한 점에서 2009 개정에 따른 수학과 교육과정에서는 고등학교 수학과 교육과정 개정안에서 일반 과목 교과의 기본 방향을 다음과 같이 설정하였다.
첫째, 계산 위주의 학습을 지양한다.
둘째, 내용 및 주제 간의 연결성을 강조한다.
셋째, 학습 내용을 적정화하여 학습량을 감축한다.
실제로 각 선택과목의 내용을 선정하고 재조직하면서 불필요한 계산을 최소화하고 주제 간의 연결성을 강화하고자 현행 교육과정의 내용을 주제별로 통폐합하고 재구성함으로써 학습량을 감축하고자 하였다. 구체적으로는 각 단원 간 통폐합을 통하여 여러 영역 및 과목에 흩어져 있던 동일 주제의 내용을 통합함으로써 불필요하게 복잡한 계산의 양을 대폭 줄이고 각 주제들이 왜 등장하게 되었는지 근원적인 물음에 답할 수 있도록 하고자 하였다. 이러한 과정을 통하여 자연 현상과 사회 현상을 이해하고 기술하는 데에 수학이 왜 필요하고 유용한지 학생들이 체험하고 그 가치를 인식하도록 하고자 하였다.

다. 영역 통합의 사례

교육과정은 수학의 학문적 특성을 고려하여 5개 영역으로 구분하더라도 교과서는 학습자의 특성을 고려하여 통합적으로 구성해야 한다. 외국의 교과서를 분석하면서 통합의 방향을 두 가지로 발견할 수 있었다.

첫째는 영역간 통합이다. 특히 대수 영역(수와 연산, 문자와 식, 함수)에서 수와 연산, 문자와 식은 함수를 위해 존재하는 것이 많다. 규칙성이나 자료 정리 등의 영역은 별도로 독립하여 구성하기 다른 영역 속에서 같이 학습되어야 한다.
둘째, 교과서의 단원이나 주제를 학문적인 용어보다는 최대한 학생들의 경험에 맞게 이름 짓는 것이다. 이것은 수학의 개념을 학생 스스로 발견하는 기쁨을 주는 목적에서 받아들일 필요가 있다. 수학의 학문적 용어로 단원의 이름을 정하는 것은 목표를 제시하고 받아들이도록, 그래서 학생들로 하여금 스스로 사고하여 발견하기보다 답을 미리 알려주는 역효과가 있음을 주의해야 한다. 인지적인 목표나 정의가 드러나지 않게 해서 학습이 이루어지는 과정에서 그날의 학습 목표를 학생 스스로 발견하는 경험은 자기 주도성을 확보하고 자아 효능감을 높이는 중요한 계기가 될 것이다. 수학에 대한 정의적 영역의 성취를 높이는 효과도 노릴 수 있다.

1) 핀란드 교과서

핀란드 초등학교의 경우 교육과정은 우리나라와 비슷하게 수와 계산, 대수, 기하, 측정, 자료 처리와 통계 등 5개의 영역으로 구분하고 있지만 교과서를 보면 자료 처리와 통계 단원은 5학년 2학기에만 명시적으로 나타나고 있다.

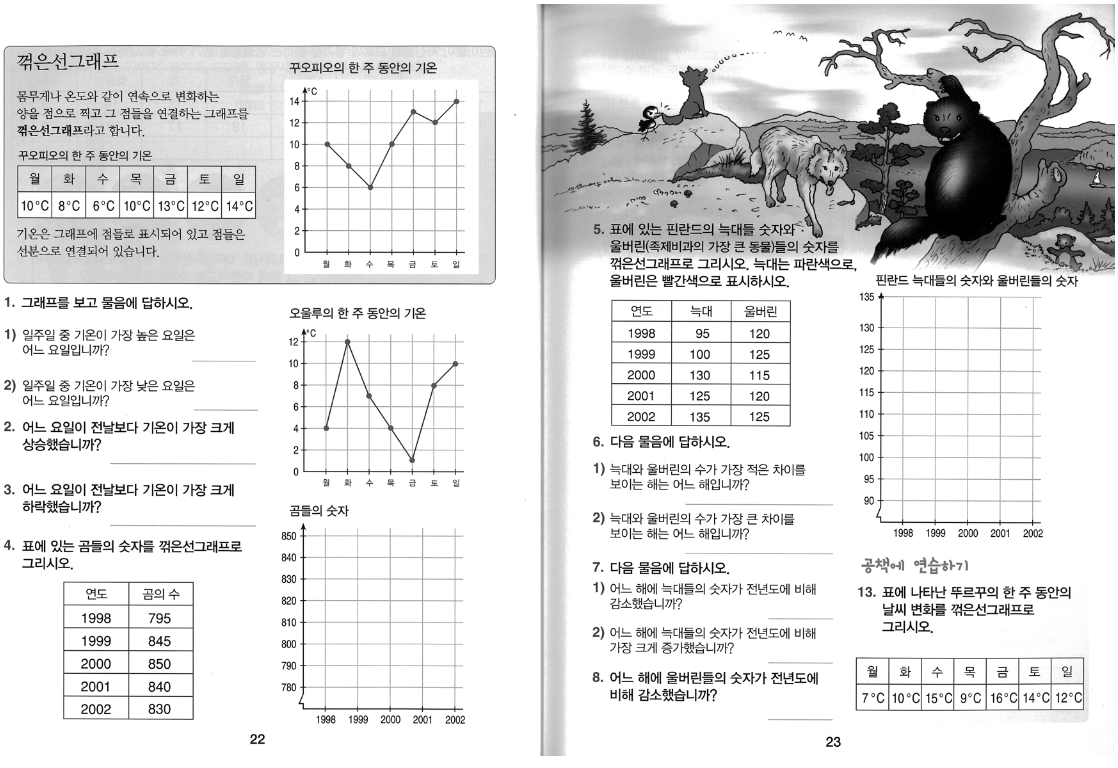
〈표 Ⅳ-1〉 핀란드와 우리나라 1-2학년군 수학과 영역 비교(전교조 초등교육과정연구모임)

영역	수와 연산	도형	측정	규칙성	확률과 통계
우리나라	• 네 자리 이하의 수 • 두 자리 수의 덧셈과 뻴셈 • 곱셈	• 입체도형의 모양 • 평면도형의 모양 • 평면도형과 그 구성 요소	• 양의 비교 • 시각 읽기 • 시각과 시간 • 길이	• 규칙 찾기	• 분류하기 • 표 만들기 • 그래프 그리기

영역	수와 연산	도형(기하)	측정	대수	차료처리와 통계
핀란드	• 숫자, 순서수 • 수의 성질 • 십진법의 원리 • 덧셈과 빼셈 • 곱셈과 구구단 • 구체적 도구를 사용한 나눗셈 • 분수의 개념 이해	• 공간적 관계 관찰 • 평면 도형의 입체 도형 • 점, 선분, 수평선, 수직선, 반직선, 직선, 각도	• 측정의 원리 • 길이, 부피, 겉넓이, 시간, 가격 • 측정 도구 사용 • 측정 단위의 사용과 비교 • 측정 결과의 검산	• 규칙성, 비율, 상관관계를 그림으로 보기 • 간단한 수열	• 자료 탐색, 수집, 저장 • 간단한 도표와 다이어그램 읽기 • 수집된 자료를 막대 그래프로 제시하기

다른 학기의 교과서는 연산 속에서나 기하 속에서 통계를 다루고 있다. 예를 들면, 다음 [그림 Ⅳ-1]은 핀란드 4-1학기 첫 단원인 덧셈과 뺄셈(0-9999)에서 통계 영역의 꺾은선그래프를 다루고 있다. 이와 같이 지루하고 단순한 연산을 실제적인 사용처와 같이 다루게 되면 학생들은 왜 그 연산을 해야 하는지를 의심 없이 받아들이며, 필요성을 저절로 인식하게 되는 효과가 있다.

[그림 Ⅳ-1] 핀란드 초등 4-1학기 덧셈과 뺄셈 단원에 나온 꺾은선그래프



꺾은선그래프

몸무게나 온도와 같이 연속으로 변화하는 양을 점으로 찍고 그 점들을 연결하는 그래프를 **꺾은선그래프**라고 합니다.

꾸오피오의 한 주 동안의 기온

월	화	수	목	금	토	일
10°C	8°C	6°C	10°C	13°C	12°C	14°C

기온은 그래프에 점들로 표시되어 있고 점들은 선분으로 연결되어 있습니다.

꾸오피오의 한 주 동안의 기온

1. 그래프를 보고 물음에 답하시오.

1) 일주일 중 기온이 가장 높은 요일은 어느 요일입니까?

2) 일주일 중 기온이 가장 낮은 요일은 어느 요일입니까?

2. 어느 요일이 전날보다 기온이 가장 크게 상승했습니까?

3. 어느 요일이 전날보다 기온이 가장 크게 하락했습니까?

4. 표에 있는 곰들의 숫자를 꺾은선그래프로 그리시오.

연도	곰의 수
1998	795
1999	845
2000	850
2001	840
2002	830

오울루의 한 주 동안의 기온

곰들의 숫자

22

5. 표에 있는 핀란드의 늑대들 숫자와 울버린(족제비과의 가장 큰 동물)들의 숫자를 꺾은선그래프로 그리시오. 늑대는 파란색으로, 울버린은 빨간색으로 표시하시오.

연도	늑대	울버린
1998	95	120
1999	100	125
2000	130	115
2001	125	120
2002	135	125

6. 다음 물음에 답하시오.

1) 늑대와 울버린의 수가 가장 적은 차이를 보이는 해는 어느 해입니까?

2) 늑대와 울버린의 수가 가장 큰 차이를 보이는 해는 어느 해입니까?

7. 다음 물음에 답하시오.

1) 어느 해에 늑대들의 숫자가 전년도에 비해 감소했습니까?

2) 어느 해에 늑대들의 숫자가 전년도에 비해 가장 크게 증가했습니까?

8. 어느 해에 울버린들의 숫자가 전년도에 비해 감소했습니까?

핀란드 늑대들의 숫자와 울버린들의 숫자

공책에 연습하기

13. 표에 나타난 뚜르꾸의 한 주 동안의 날씨 변화를 꺾은선그래프로 그리시오.

월	화	수	목	금	토	일
7°C	10°C	15°C	9°C	16°C	14°C	12°C

23

핀란드 국가수준 핵심 교육과정 수학과 개관에 보면 '수학이 갖는 구체성은 학생들이 자신의 경험을 사고 체계와 연결시키는데 중요한 역할을 한다. 따라서 학생들이 일상생활에서 나타나는 문제들 중에서 수학적 사고나 조작으로 해결될 수 있는 문제를 효과적으로 활용해야 한다.'고 명시되어 있다. 이에 따라 핀란드의 교과서는 실생활에 연관된 다양하고 흥미로운 상황을 제시하여 문제해결 능력 증진과 내재적 동기를 유발하고 있다. 일상생활에서 자연스럽게 접할 수 있는 상황이 그림으로 묘사되어 있으며, 어린이들이 평소 사용하는 물건, 동물, 식물 등을 수학 문제의 소재로 활용하고 있어 쉽게 이해할 수 있고 수학에 대한 흥미도도 높다고 한다.

우리나라 교과서는 일종의 공식을 적용하는 정형화된 문제들을 주로 다룬다. 물론 일상생활에서 익숙하게 접할 수 있는 소재를 사용하기는 하지만 실생활과 관련이 적거나 가상의 상황인 경우가 많고, 문제에 적용하는 숫자 대부분이 원하는 정답이 나오도록 하기 위해 조작된 숫자들인 경우가 많다. 인터넷 유머에 수학 문제의 주관식 정답은 -1, 0, 1 중에 찍으면 된다는 말까지 있다. 하지만 핀란드는 실생활 연계 문제에서 적용하는 수도 실제 사용하는 수를 제공하고 있다. 복잡하지만 실생활에서 접할 수 있는 실제적 수치를 사용하여 수학과 실생활에서의 유용성을 깨달을 수 있게끔 하는 것이다.

2) 미국 CCSSM(Common Core State Standards for Mathematics)에 따른 교과서

미국 CCSSM 교육과정에 따른 초등학교 교과서의 ‘수와 연산’ 영역을 비교 분석한 안지영(2014)은 미국 교과서의 한 특징으로 분수와 소수를 다루는 부분에 대한 두 나라 간의 차이점에 대하여 서술하였다.

〈표 Ⅳ-2〉 ‘소수’ 학습 내용 분석 (안지영, 2014)

<table>
<tr><th colspan="2">미국</th><th colspan="2">한국</th></tr>
<tr><th>학년</th><th>학습 시기 및 내용</th><th>학년</th><th>학습 시기 및 내용</th></tr>
<tr><td>K</td><td>·</td><td>1</td><td>·</td></tr>
<tr><td>1</td><td>·</td><td>2</td><td>·</td></tr>
<tr><td>2</td><td>·</td><td>3</td><td>• 분수를 통해 소수의 개념 도입
(분모가 10인 분수)
• 소수 한 자리 수의 크기 비교</td></tr>
<tr><td>3</td><td>·</td><td>4</td><td>• 소수 두 자리 수, 소수 세 자리 수의 크기 비교
• 소수 두 자리 수의 범위에서 소수의 덧셈과 뺄셈</td></tr>
<tr><td>4</td><td>• 분수를 통해 소수의 개념 도입
(분모가 10 또는 100인 분수)
• 소수 두 자리 수의 크기 비교</td><td>5</td><td rowspan="2">• 소수의 곱셈
• 소수의 나눗셈
• 분수와 소수의 관계 이해
• 분수를 소수로, 소수를 분수로
• 분수와 소수의 크기 비교
• 간단한 분수와 소수의 혼합 계산</td></tr>
<tr><td>5</td><td>·</td><td>6</td></tr>
</table>

한국에서의 소수 학습은 분수와 학습량이 비슷하지만 미국은 소수 학습을 한 학년에서만 다루고 있으며 학습량도 분수에 비해 적다. 즉 소수보다는 분수의 학습에 초점을 두고 있는 것으로 보인다. 이는 미국의 교육과정이 한국처럼 분수와 소수를 분리하여 지도하지 않기 때문이다. 미국은 분수 내용 영역 내에서 분수의 다른 표현 방식의 하나로서 소수를 지도하고 있다.
한국은 소수의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈을 모두 학습하며, 간단한 분수와 소수의 혼합계산까지 다루고 있으나, 미국은 초등학교 교육과정에서는 소수의 사칙연산을 다루지 않는다(안지영, 2014).

우리나라 교육과정은 앞 단원에서 학습한 내용은 다음 단원에서 중복되지 않는다. 이에 비

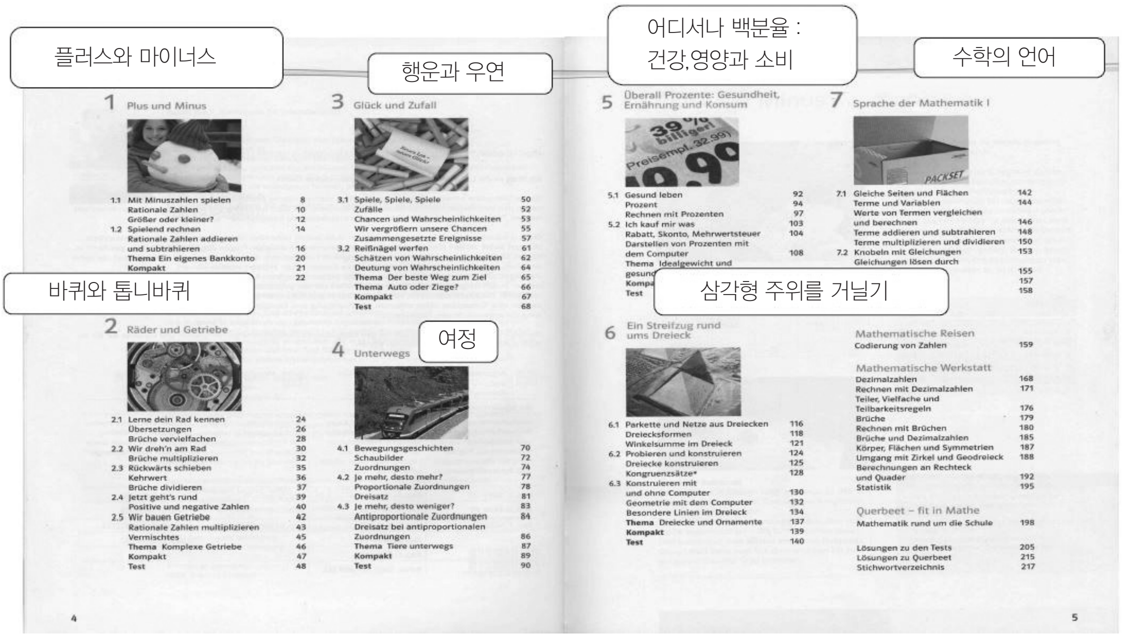
해 미국 교과서는 하나의 내용 요소를 학습하면 이후 단원이나 학년에서 다른 내용과 통합하여 반복하여 학습할 수 있도록 하는 구조로 되어 있다는 점이 특징이다.
이러한 특징에 대하여 조인혜(2013)는 우리나라와 미국의 소수 학습에 대한 비교하여 이에 대한 구체적인 증거를 제시하였다.

미국은 소수의 학습 주제에 따라 단원 구성 순서와 통합하는 단원의 종류가 다르다. 즉, 1.2학년에서는 '돈의 계산' 단원 (1학년의 9. Money, 2학년의 3. Place Value to 100 and Money) 에 소수의 형식 학습을 한 차시 분량으로 삽입하였고, 3, 4학년에서는 '측정영역'과 소수의 개념 학습을 통합한 단원(Decimals and Measurement)으로 구성하며 분수 학습 다음에 소수를 학습하는 순서로 단원을 배치하고 있는데, 4학년에서는 1, 2학년과 마찬가지로 '돈의 계산' 단원 (1. Place Value and Money) 에 '소수의 개념 이해' 차시를 삽입하였다. 5학년에서는 '자연수의 덧셈과 뺄셈, 곱셈, 나눗셈'을 소수의 연산과 통합한 단원(1. Place Value, Adding, and Subtraction, 2. Multiplying Whole Numbers and Decimals, 4. Dividing with Two–Digit Divisors)으로 구성하였고, 6학년에서는 소수를 한 단원으로 독립(2. Decimals) 시켜 이전의 개념학습과 연산 법칙을 통합하여 학습하도록 하고, 분수 학습 단원(3. Numbers and Fraction Concepts) 내에 '소수와 분수의 관계'를 삽입하여 학습하도록 하였다.
또, 우리나라는 이전의 학습 내용을 반복하지 않으면서 '소수의 개념 이해→ 소수의 덧셈과 뺄셈 → 소수의 곱셈과 나눗셈 → 소수와 분수와의 관계'와 같이 세부적인 학습 내용을 단계적으로 학습하도록 구성되어 있다.
반면에 미국은 '소수의 개념 이해, 간단한 덧셈과 뺄셈 → 자연수 연산 학습의 적용 · 발전(자릿값, 덧셈과 뺄셈) → 소수의 학습 총정리' 형식으로 이전 학습 내용을 반복함과 동시에 전체 학습 내용을 포괄적으로 다루어 6학년에서 통합하는 형태를 취하고 있다. 이는 미국 교과서가 학년별 교과 내용의 연계를 중시하고 있다는 점을 시사하고 있다.
또, 미국 교과서에서는 소수 단원을 도형이나 측정영역과 통합하여 구성으로써 학습의 계열성과 개념의 실생활 적용에 큰 비중을 두고 있음을 알 수 있다. 즉, 2학년의 경우 앞 차시에서 여러 가지 도형을 학습한 후에 그 도형을 활용하여 다음 차시에서 '똑같이 나누기'를 학습할 수 있도록 하였다. 3학년의 경우에는 분수와 소수를 전 차시에서 학습한 후 다음 차시인 길이, 무게 단위에서 활용하도록 구성되어 있다(조인혜, 2013).

이처럼 미국은 단지 소수 단원만을 비교했을 때는 4학년 때 잠깐 배우는 것이 아닌가 생각이 되지만, 학생들의 실제를 고려하여 다양한 단원과 연계하여 반복적으로 학습할 수 있도록 하면서 다양한 단원과 학년에 통합되어 있다는 사실을 확인할 수 있었다.

3) 독일과 미국 교과서

[그림 Ⅳ-2] 독일의 mathe live 7의 목차(허난 외, 2011에서 재인용)



독일의 교과서를 보면 교과서의 단원명에 우리와 큰 차이점을 보인다. 예를 들면 함수 영역에서 우리나라 교과서의 단원명은 '일차함수', '이차함수'와 같은 학문 중심적인 단원명을 사용하지만 독일 교과서는 [그림 Ⅳ-2]에서 보는 바대로 '바퀴와 톱니바퀴', '행운과 우연'과 같이 실생활 소재나 감성적인 단어를 단원명으로 사용하여 단원의 시작부터 내용 전체를 주도하고 있다. 이는 현실과의 관련성을 중시하는 독일의 수학교육사상을 드러내는 것일 뿐만 아니라 학습자로 하여금 수학은 흥미롭고 실용적인 학문임을 느낄 수 있도록 해준다. 이런 단원명은 미국의 중학교 교과서(Connected Mathematics와 Mathematics in Context 등)에서도 찾아볼 수 있다.

[그림 Ⅳ-3] 미국 Connected Mathematics의 Filling and Wrapping 교과서 목차(2014)

Filling and Wrapping 채우기와 포장

Three-Dimensional Measurement 삼차원 측정(겉넓이와 부피)

Look for these icons that point to digital resources. Launch Tools ACTIVe-book Student Activities

[그림 Ⅳ-4] 미국의 Mathematics in Context의 Comparing Quantities 교과서 목차(2006)

Teachers Matter

Contents

$50.00

ORDER	TACO	SALAD	DRINK	TOTAL
1	1	—	2	$5.00
2	2	1	4	$8.00
3	—	4	4	$11.00
4				
5				
6				
7				

v Comparing Quantities   Teachers Matter

위의 [그림 Ⅳ-4]와 같이 수학이 학문적 용어가 아닌 일상생활의 용어로 된 단원명을 사용하는 것은 수학의 원리가 우리의 삶과 직접적으로 연결되어 있는 것을 학생들이 이해할 수 있는 방법 중의 하나라고 생각한다. 이는 우리나라의 2009 개정 교육과정에서도 강조하고 있는 것처럼 실생활에서의 여러 가지 현상과 문제를 해결하는 능력을 기르기 위하여 수학을 학습한다는 것을 인식시켜줄 수 있으며, 앞으로의 우리나라의 교과서에서도 적극 도입해야 한다.

우리나라 초등학교와 중학교 수학 교과서는 모든 단원이 5개의 영역별로 별도로 떨어져 구성되어 있다. 중학교 교과서를 보면 1학기에 학습하는 앞부분에 수와 연산, 문자와 식, 함수 단원이 순서대로 나열되어 있다. 조금 거칠게 말하자면 학생들은 수와 연산에서 학습한 내용을 기초로 문자와 식을 학습하고, 수와 연산, 문자와 식 단원에서 학습한 내용을 토대로 함수 단원을 학습한다. 학생들은 수와 연산, 문자와 식 단원을 학습하면서 장래에 학습할 함수를 위한 기초 연산을 지루하게 견디는 과정에서 인내하지 못하고 수학에서 멀어져간다.

우리나라에서도 이러한 문제를 해결할 시사점을 2009 개정 고등학교 수학 교육과정에서 찾을 수 있다. 2009 개정 교육과정에서 이전보다 진일보한 것은 고등학교에서 여러 영역 및 과목에 흩어져 있던 동일 주제의 내용을 통합하고 연결성을 강화시켰다는 점이다. 그 결과 불필요하게 복잡한 계산의 양을 대폭 줄이고 각 주제들이 왜 등장하게 되었는지에 대한 근원적인 물음에 답할 수 있게 되었다. 이러한 과정을 통하여 자연 현상과 사회 현상을 이해하고 기술하는 데에 수학이 왜 필요하고 유용한지 학생들이 체험하고 그 가치를 인식하도록 하고자 하였다.

4) 우리나라 고등학교 교육과정과 교과서

2009 개정 교육과정 보고서에서 대수 영역을 어떻게 통합했는지 그 근거와 통합의 과정이 자세히 나타나 있다. 삭제되거나 통합된 내용은 학습하고자 하는 최종목표에 부합하는 성질 위주로 다루어 지나친 계산만을 유발하여 학습량과 어려움을 늘리는 요소들을 통합하거나 삭제하는 방식이었다.

가) 2007 개정 교육과정과 2009 개정 교육과정의 비교

[수학 Ⅱ]의 '방정식과 부등식' 영역을 삭제하였는데, 구체적으로는 분수방정식과 무리방정식, 그리고 고차부등식과 분수부등식의 내용을 삭제하였다. 이러한 주제들은 함수의 증감표

를 만드는 데에 필요한 고차부등식을 제외하면 독립적인 주제들이고, 실제 학생들이 다루는 문제들을 보면 실생활에서는 등장하지 않는 계산 위주의 문제들이 주를 이룬다. 이러한 점에서 학습량 감축을 위해 이 영역을 삭제하였으며, 증감표 작성에 필요한 고차부등식의 경우 미분을 이용하여 그래프를 그려서 해결할 수 있도록 유도하였는데, 이는 부등식 풀이에서도 같은 방식을 취하였다. 이차부등식을 풀고 나면 삼차함수의 증감표를 만들 수 있고, 삼차함수의 그래프를 그리면 삼차부등식을 풀 수 있으므로 사차함수의 증감표를 만들 수 있다. 이러한 방식으로 고차방정식의 그래프와 고차부등식을 연계하여 지도할 수 있도록 구성하였다.

1) 수학 Ⅰ
(중략)
나) 복소수와 이차방정식의 연계 강화
복소수는 이차방정식의 해의 존재성과 관련하여 그 필요성을 알게 하고, 이를 통해 허수 단위 의 뜻을 분명히 알 수 있도록 하는 것이 중요하다. 현행 교육과정에서는 복소수는 '수와 연산' 영역에서, 그리고 이차방정식은 '문자와 식' 영역에서 별도로 다룬다. 이로 인해 복소수 체계의 구조적 측면이 강조되고 불필요하게 복잡한 계산 문제를 많이 다루게 되어 학습의 양과 어려움이 가중된다는 비판이 제기되어 왔다(김도한 외, 2009a). 본 개정안 연구에서는 이차방정식과 연계하여 복소수를 다루는 것이 학생들이 복소수의 개념을 이해하는데 도움이 되고 불필요한 계산을 줄일 수 있다고 판단하여 수와 연산 영역에서 다루어지던 복소수를 이차방정식과 연계하여 다루도록 '수학 Ⅰ'의 '[2]방정식과 부등식' 영역으로 이동하였다. 이때, 복소수의 연산에 대한 성질을 부각시켜 불필요하고 복잡한 계산에 치우치지 않도록 두 개의 소영역을 한 개로 약화시켜 통합하였다. 한편, 복소수는 심화 과목인 '고급 수학 Ⅱ'에서 보다 깊이 있게 다루도록 하였다.

다) 유리식과 무리식 약화
'유리식과 무리식'은 유리함수, 무리함수를 이해하고 유리 방정식, 무리 방정식, 유리 부등식, 무리 부등식 등을 다루기 위한 기초를 제공하는 데 의의가 크다. 그러나 김도한 외(2009a) 연구 결과 및 개정 시안 연구의 설문 조사 결과, 실제 학교현장에서는 유리식과 무리식을 유리함수, 무리함수, 유리 방정식, 무리 방정식, 유리 부등식, 무리 부등식 등과 연계하여 생각하지 못하고 번분수, 이중근호 등 유리식과 무리식의 계산 방법과 기능의 숙달에 많은 시간과 노력을 들이고 있어, 학생들의 학습 동기 유발을 어렵게 하고 흥미를 떨어뜨리며 학습량이 가중된다는 문제점이 제기되었다. 이러한 관점에서 본 개정안에서는 현행 교육과정 [수학]의 '유리식과 무리식' 영역을 삭제하고, 두 용어 '유리식', '무리식'만 '수학 Ⅱ'의 '[2] 함수'로 이동하여 유리함수와 무리함수를 이해하는데 필요한 최소한의 내용만을 다룰 수 있도록 하였다. 이를 통해 유리식과 무리식 관련 계산을 최소화하는 동시에 학생들의 학습량을 감축하고자 하였다. 〈표 Ⅲ-38 참조〉

〈표 Ⅲ-38〉 유리식과 무리식 내용 비교

현행 교과목	현행 교육과정	교육과정 개정안
수학 (고1)	5 유리식과 무리식 ① 유리식의 뜻을 알고, 그 계산을 할 수 있다. ② 무리식의 뜻을 알고, 그 계산을 할 수 있다.	삭제 : 수학 Ⅱ의 '[2] 함수' 영역에 용어 (유리식, 무리식)만 제시

(중략)

마) 이차방정식, 이차부등식, 이차함수의 통합 및 연계성 강화

현행 교육과정에서 이차방정식과 이차부등식은 '문자와 식' 영역에서 다루고, 이차함수는 '함수' 영역에서 다루면서, 이차함수의 활용에서 이들 간의 관련성을 학습하도록 되어 있다. 본 개정안에서는 이들 내용들 간의 연계성을 강화하고 서로 다른 영역에서 다루는 과정에서 불필요하게 발생하는 학습량을 감축한다는 점에서 이차방정식의 이론과 이차함수의 성질이 자연스럽게 연계되도록 내용을 통합하였다. 〈표 Ⅲ-40 참조〉

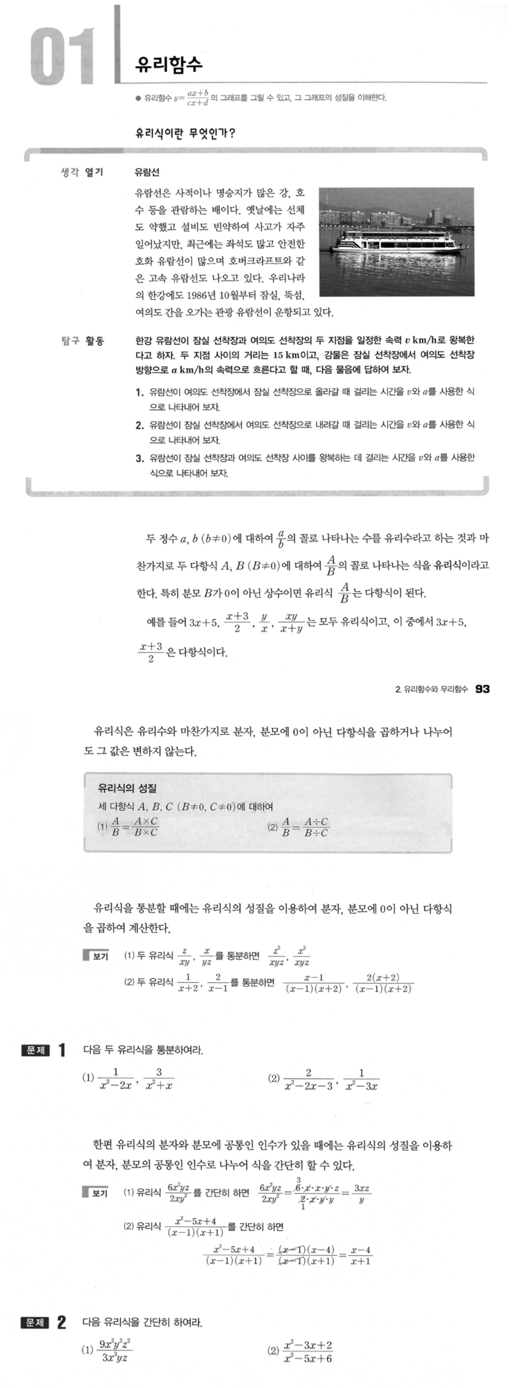
〈표 Ⅲ-40〉 방정식과 부등식 내용 비교

<table>
<tr><th>현행 교과목</th><th>현행 교육과정</th><th>교육과정 개정안</th></tr>
<tr><td rowspan="4">수학</td><td>6 이차방정식
① 이차방정식의 실근과 허근의 뜻을 안다.
② 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해한다.
③ 이차방정식에서 근과 계수의 관계를 이해한다.</td><td rowspan="4">■ 복소수와 이차방정식
○ 이차방정식의 실근과 허근의 뜻을 안다.
○ 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해한다.
○ 이차방정식에서 근과 계수의 관계를 이해한다.
■ 이차방정식과 이차함수 ○ 이차함수와 이차방정식의 관계를 이해한다.
○ 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한다.
○ 이차함수의 최대, 최소를 이해한다.
■ 여러 가지 방정식
○ 간단한 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있다.
○ 미지수가 3개인 연립일차방정식과 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있다.
■ 여러 가지 부등식 ○ 부등식의 성질을 이해하고, 절댓값을 포함한 일차부등식을 풀 수 있다.
○ 이차함수와 이차부등식의 관계를 이해하고, 이차부등식과 연립이차부등식을 풀 수 있다.</td></tr>
<tr><td>7 고차방정식과 연립방정식
① 간단한 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있다.
② 미지수가 3개인 연립일차방정식과 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있다.</td></tr>
<tr><td>8 이차부등식과 절대부등식
① 부등식의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
② 절댓값을 포함한 일차부등식을 풀 수 있다.
③ 이차부등식과 연립이차부등식을 풀 수 있다.</td></tr>
<tr><td>2 이차함수의 활용
① 이차함수의 최대, 최소를 이해한다.
② 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한다.
③ 이차함수와 이차방정식, 이차부등식의 관계를 이해한다.</td></tr>
</table>

나) 교과서

[표 Ⅳ-3] 영역 통합 및 연결성 강화 (유리식과 무리식)

2007 개정 교과서(7쪽에서 발췌)	2009 개정 교과서(3쪽 전체)
Ⅲ. 식의 계산 2. 유리식과 무리식 단원 중 유리식	Ⅱ. 함수 2. 유리함수와 무리함수 단원 중 유리식



01 유리함수

● 유리함수 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해한다.

유리식이란 무엇인가?

생각 열기 유람선

유람선은 사적이나 명승지가 많은 강, 호수 등을 관람하는 배이다. 옛날에는 선체도 약했고 설비도 빈약하여 사고가 자주 일어났지만, 최근에는 좌석도 많고 안전한 호화 유람선이 많으며 호버크라프트와 같은 고속 유람선도 나오고 있다. 우리나라의 한강에도 1986년 10월부터 잠실, 뚝섬, 여의도 간을 오가는 관광 유람선이 운항되고 있다.

탐구 활동 **한강 유람선이 잠실 선착장과 여의도 선착장의 두 지점을 일정한 속력 v km/h로 왕복한다고 하자. 두 지점 사이의 거리는 15 km이고, 강물은 잠실 선착장에서 여의도 선착장 방향으로 a km/h의 속력으로 흐른다고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.**

1. 유람선이 여의도 선착장에서 잠실 선착장으로 올라갈 때 걸리는 시간을 v와 a를 사용한 식으로 나타내어 보자.
2. 유람선이 잠실 선착장에서 여의도 선착장으로 내려갈 때 걸리는 시간을 v와 a를 사용한 식으로 나타내어 보자.
3. 유람선이 잠실 선착장과 여의도 선착장 사이를 왕복하는 데 걸리는 시간을 v와 a를 사용한 식으로 나타내어 보자.

두 정수 a, b $(b\neq0)$에 대하여 $\frac{a}{b}$의 꼴로 나타나는 수를 유리수라고 하는 것과 마찬가지로 두 다항식 A, B $(B\neq0)$에 대하여 $\frac{A}{B}$의 꼴로 나타나는 식을 **유리식**이라고 한다. 특히 분모 B가 0이 아닌 상수이면 유리식 $\frac{A}{B}$는 다항식이 된다.

예를 들어 $3x+5$, $\frac{x+3}{2}$, $\frac{y}{x}$, $\frac{xy}{x+y}$는 모두 유리식이고, 이 중에서 $3x+5$, $\frac{x+3}{2}$은 다항식이다.

2. 유리함수와 무리함수 **93**

유리식은 유리수와 마찬가지로 분자, 분모에 0이 아닌 다항식을 곱하거나 나누어도 그 값은 변하지 않는다.

유리식의 성질
세 다항식 A, B, C $(B\neq0,\ C\neq0)$에 대하여
(1) $\frac{A}{B}=\frac{A\times C}{B\times C}$ (2) $\frac{A}{B}=\frac{A\div C}{B\div C}$

유리식을 통분할 때에는 유리식의 성질을 이용하여 분자, 분모에 0이 아닌 다항식을 곱하여 계산한다.

보기 (1) 두 유리식 $\frac{z}{xy}$, $\frac{x}{yz}$를 통분하면 $\frac{z^2}{xyz}$, $\frac{x^2}{xyz}$
(2) 두 유리식 $\frac{1}{x+2}$, $\frac{2}{x-1}$를 통분하면 $\frac{x-1}{(x-1)(x+2)}$, $\frac{2(x+2)}{(x-1)(x+2)}$

문제 **1** 다음 두 유리식을 통분하여라.
(1) $\frac{1}{x^2-2x}$, $\frac{3}{x^2+x}$ (2) $\frac{2}{x^2-2x-3}$, $\frac{1}{x^2-3x}$

한편 유리식의 분자와 분모에 공통인 인수가 있을 때에는 유리식의 성질을 이용하여 분자, 분모의 공통인 인수로 나누어 식을 간단히 할 수 있다.

보기 (1) 유리식 $\frac{6x^2yz}{2xy^2}$를 간단히 하면 $\frac{6x^2yz}{2xy^2}=\frac{\overset{3}{\cancel{6}}\cdot\cancel{x}\cdot x\cdot\cancel{y}\cdot z}{\underset{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{y}\cdot y}=\frac{3xz}{y}$
(2) 유리식 $\frac{x^2-5x+4}{(x-1)(x+1)}$를 간단히 하면
$$\frac{x^2-5x+4}{(x-1)(x+1)}=\frac{\cancel{(x-1)}(x-4)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\frac{x-4}{x+1}$$

문제 **2** 다음 유리식을 간단히 하여라.
(1) $\frac{9x^2y^3z^2}{3x^3yz}$ (2) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$

Ⅰ. 함수

02 다음 분수식을 통분하여라.

(1) $\frac{1}{x+2}$, $\frac{2}{x-5}$ (2) $\frac{1}{x^2+x+1}$, $\frac{x}{x-1}$, $\frac{2}{x^2-1}$

(3) $\frac{2}{x^2-1}$, $\frac{3}{x^2-2x-3}$ (4) $\frac{x+2}{x^2-1}$, $\frac{x+3}{x^2+x-2}$

05 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\dfrac{\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}}{\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}}$ (2) $1-\dfrac{1}{1-\frac{1}{1-a}}$

04 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

(3) $\frac{x}{1+\sqrt{x+1}}+\frac{x}{1-\sqrt{x+1}}$ (4) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

05 $x=\sqrt{3}$일 때, $\frac{1}{\sqrt{x+1+2\sqrt{x}}}-\frac{1}{\sqrt{x+1-2\sqrt{x}}}$의 값을 구하여라.

유리식의 덧셈과 뺄셈은 유리수의 덧셈과 뺄셈에서처럼 분모를 통분하여 계산한다.

예제 01 다음 식을 계산하여라.

(1) $\frac{1}{x+3}+2$ (2) $\frac{x+5}{x^2-1}-\frac{2}{x^2+x}$

다항식 A, B, $C(C\neq0)$에 대하여
(1) 덧셈: $\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C}$
(2) 뺄셈: $\frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C}$

풀이 (1) $\frac{1}{x+3}+2=\frac{1+2(x+3)}{x+3}=\frac{2x+7}{x+3}$

(2) $\frac{x+5}{x^2-1}-\frac{2}{x^2+x}=\frac{x+5}{(x+1)(x-1)}-\frac{2}{x(x+1)}$

$=\frac{x^2+3x+2}{x(x+1)(x-1)}=\frac{\cancel{(x+1)}(x+2)}{x\cancel{(x+1)}(x-1)}=\frac{x+2}{x(x-1)}$

답 (1) $\frac{2x+7}{x+3}$ (2) $\frac{x+2}{x(x-1)}$

문제 3 다음 식을 계산하여라.

(1) $\frac{x+4}{x^2-x-2}+\frac{x+3}{x^2-1}$ (2) $\frac{-3}{2x+1}-1$

유리식의 곱셈은 유리수의 곱셈에서처럼 분모는 분모끼리, 분자는 분자끼리 곱하여 계산한다. 또 유리식의 나눗셈은 유리수의 나눗셈에서처럼 나누는 식의 분자와 분모를 바꾸어 곱하여 계산한다.

예제 02 다음 식을 계산하여라.

(1) $\frac{x+4}{x^2-2x-3}\times\frac{x^2-3x}{x-2}$ (2) $\frac{x-2}{x^2-1}\div\frac{3x-6}{x^2-x}$

다항식 A, B, C, $D(B\neq0, D\neq0)$에 대하여
(1) 곱셈: $\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}$
(2) 나눗셈: $\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}$
(단, $C\neq0$)

풀이 (1) $\frac{x+4}{x^2-2x-3}\times\frac{x^2-3x}{x-2}=\frac{x+4}{(x+1)\cancel{(x-3)}}\times\frac{x\cancel{(x-3)}}{x-2}=\frac{x(x+4)}{(x+1)(x-2)}$

(2) $\frac{x-2}{x^2-1}\div\frac{3x-6}{x^2-x}=\frac{x-2}{x^2-1}\times\frac{x^2-x}{3x-6}$

$=\frac{\cancel{x-2}}{(x+1)\cancel{(x-1)}}\times\frac{x\cancel{(x-1)}}{3\cancel{(x-2)}}=\frac{x}{3(x+1)}$

답 (1) $\frac{x(x+4)}{(x+1)(x-2)}$ (2) $\frac{x}{3(x+1)}$

문제 4 다음 식을 계산하여라.

(1) $\frac{x^2-1}{(x+2)^2}\times\frac{3x+2}{x-1}$ (2) $\frac{x-3}{x^2+3x+2}\div\frac{x^2-4x+3}{x^2+5x+4}$

2. 유리함수와 무리함수 95

(1) 수학Ⅱ 유리식과 무리식, 유리함수와 무리함수 단원의 통합

예를 들어, 위에 나온 것은 유리식 부분의 교과서로 2007 개정 교육과정과 2009 개정 교육과정을 비교한 것이다. 고등학교 1학년 과정의 문자와 식 단원의 '유리식과 무리식'을 함수 단원의 '유리함수와 무리함수' 단원의 하위 요소로 편성하여 교과서 분량으로 치면 7쪽이 3쪽으로 줄어들었고, 유리식에서 번분수 등 복잡한 계산이 사라지고, 유리함수에 필요한 $y=\frac{k}{x}$ 형태의 유리식 정도를 학습한다. 유리식이 유리함수 단원의 하위 영역이 되면서 2007 개정 교과서에 있던 복잡한 계산들이 사라졌다. 이런 복잡한 계산 문제는 고등학교에서 취급하는 유리함수를 배우는 데 전혀 도움이 되지 않기 때문이다. 이는 유리식의 계산이라는 문자와 식 단원이 독립적으로 존재하면서 학습 목표가 되어 생긴 문제들이다.

[그림 Ⅳ-5] 삭제된 문제 유형들

01 다음 분수식을 약분하여라. (1) $\frac{12a^2xy^3}{9ax^2y}$ (2) $\frac{x^2-3x}{x^2-x-6}$ (3) $\frac{x^2+3x-4}{x^3-1}$ (4) $\frac{x^2+xy}{x^2+3xy+2y^2}$	02 다음 분수식을 통분하여라. (1) $\frac{1}{x+2}$, $\frac{2}{x-5}$ (2) $\frac{1}{x^2+x+1}$, $\frac{x}{x-1}$, $\frac{2}{x^3-1}$ (3) $\frac{2}{x^2-1}$, $\frac{3}{x^2-2x-3}$ (4) $\frac{x+2}{x^2-1}$, $\frac{x+3}{x^2+x-2}$
05 다음 식을 간단히 하여라. (1) $\dfrac{\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}}{\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}}$ (2) $1-\dfrac{1}{1-\frac{1}{1-a}}$	04 다음 식을 간단히 하여라. (1) $\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ (3) $\frac{x}{1+\sqrt{x+1}}+\frac{x}{1-\sqrt{x+1}}$ (4) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ 05 $x=\sqrt{3}$일 때, $\frac{1}{\sqrt{x+1+2\sqrt{x}}}-\frac{1}{\sqrt{x+1-2\sqrt{x}}}$의 값을 구하여라.

2009 개정 교육과정에서는 교수 · 학습상의 유의점에서 "인수분해는 이차방정식의 해를 구하는 데 필요한 정도로 다룬다."라고 되어 있다. 하지만 실제로 학생들이 배우는 교과서의 내용을 살펴보면, 일부 교과서에서는 인수분해를 이용하여 복잡한 수를 계산하거나 치환을 이용한 복잡한 식의 인수분해를 다루고 있다. '이차방정식의 해를 구하는 데 필요한 정도'라는 애매한 표현은 교과서 저자에 따라 다양하게 해석될 수 있다. 이러한 문제는 인수분해를 이차방정식과 통합하여 그 하위 요소로 넣으면 보다 명확하게 해결된다. 이차방정식 단원 속에 있는 인수분해는 당연히 이차방정식의 해를 구하는 데 필요한 정도만 다루게 된다. 이런 의미에서 수와 연산, 문자와 식, 함수의 세 단원 중 가능한 한 많은 부분을 함수나 방정식으로 통합하여 가르치는 방안을 모색해야 한다. 교육과정은 학문의 위계상 영역별로 구성되는 것이 바람직하지만, 교과서에서는 세 단원을 최대한 통합하면 학습 내용이 경감되고, 그 내용 간의 연결이 긴밀해지는 효과가 발생할 것이다.

다. 중학교 대수 영역 통합에 대한 제안

중학교 1, 2학년의 대수 영역의 경우 함수를 배우는 것을 중심으로 이를 해결하는 데 필요한 도구로 기존 교과서에서의 수와 연산, 문자와 식의 내용 중 필요한 부분만 다루도록 하는 것을 제안한다. 예를 들어 실생활에서 방정식을 세워야지만 해결할 수 있는 적절한 상황을 찾아 이를 해결하는 데 필요한 도구로서 문자, 식, 연산 등을 다룬다. 즉 문자와 식 자체가 수

업목표가 될 필요는 없다. 학생들 입장에서는 방정식을 푸는 데 필요하니까 문자와 식을 공부한다고 학생들 스스로 느낄 수 있어야 한다.
다음 표는 2009 개정 교육과정에서 고등학교 교과서에 나타난 통합의 방식으로 중학교 1학년 대수 영역을 통합하는 방안에 대한 예시로 제시하려고 한다.

〈표 Ⅳ-4〉 중학교 1학년 수학 일부 영역 통합 제안

현행	제안
Ⅰ. 수와 연산 2. 정수와 유리수 01. 정수와 유리수 02. 정수와 유리수의 덧셈과 뺄셈 03. 정수와 유리수의 곱셈과 나눗셈 Ⅱ. 문자와 식 1. 문자의 사용과 식의 계산 01. 문자의 사용 02. 식의 값 03. 일차식의 계산 2. 일차방정식 01. 방정식과 그 해 02. 일차방정식의 풀이 03. 일차방정식의 활용 Ⅲ. 함수 1. 함수와 그래프 01. 함수의 뜻 02. 함수의 그래프 03. 함수의 활용	Ⅰ. 함수 1. 문자와 식 01. 문제 상황 제시(함수의 활용 문제) 02. 초등학교 방식의 문제 해결 방법 복습(try and error) 03. 문자의 사용과 식의 계산 04. 정수와 유리수의 계산 ** 문자의 사용과 식의 계산, 정수와 유리수의 계산은 01의 문제 상황을 표현할 수 있고, 일차방정식의 해를 구할 수 있는 정도를 다룸. 2. 함수와 방정식 05. 함수의 그래프 06. 일차방정식의 해결 ** 함수의 그래프는 01의 문제 상황을 표현하는 형태를 다룸. 07. 여러 가지 문제 해결

우선 ‘함수’라는 대단원의 중단원을 크게 문자와식, 함수와 방정식으로 나누었다. 함수의 하위단원으로 구분하면서 ‘문자와 식’, ‘방정식’에서 다루는 정도의 문자, 식을 함수에 등장할 정도로 제한하려는 의도가 있다. 따라서 전체적으로 소주제로 존재하면서 많은 분량을 차지했던 내용 자체가 축소될 수 있을 것이다. 또한 학생들이 문자를 왜 사용하는지, 자연수 범위에서 정수로 수가 왜 확장되는지, 방정식과 함수 간의 관계 등에 대하여 연결하여 생각할 수 있는 계기를 제공할 것이다.

대수 영역을 통합하기 위하여 함수를 가르치는 데 필요한 내용을 선정하고 재조직하면서 불필요한 계산을 최소화하고 각 소주제 간의 연결성을 강화하고자 현행 교육과정의 수와 연산, 문자와 식, 함수에 해당하는 내용을 주제별로 통폐합하고 재구성함으로써 학습량을 감축하고자 하였다. 구체적으로는 이들 단원 간의 통폐합을 통하여 여러 영역(수와 연산, 문자와 식, 함수)에 흩어져 있던 동일 주제의 내용을 통합함으로써 불필요하게 복잡한 계산의 양을 대폭 줄이고 각 주제들이 왜 등장하게 되었는지 근원적인 물음에 답할 수 있도록 하고자 하였다. 이러한 과정을 통하여 자연 현상과 사회 현상을 이해하고 기술하는 데에 수학이 왜 필요하고 유용한지 학생들이 체험하고 그 가치를 인식하도록 하고자 하였다.

이러한 영역의 통합의 결과로 사라질 것으로 예상되는 문항들을 다음 [그림 Ⅳ-6]과 같다.

[그림 Ⅳ-6] 영역의 통합으로 인하여 삭제될 문항들

2. 정수와 유리수

예제 3 다음을 계산하여라.

$$\{(-4)-(5-7)\}\div\left(-\frac{1}{3}\right)^2$$

풀이

$$\begin{aligned}&\{(-4)-(5-7)\}\div\left(-\frac{1}{3}\right)^2 && \text{소괄호 안과 거듭제곱을 계산한다.}\\ &=\{(-4)-(-2)\}\div\left(+\frac{1}{9}\right) && \text{뺄셈을 덧셈으로 고친다.}\\ &=\{(-4)+(+2)\}\div\left(+\frac{1}{9}\right) && \text{중괄호를 계산한다.}\\ &=(-2)\div\left(+\frac{1}{9}\right) && \text{나눗셈을 곱셈으로 고친다.}\\ &=(-2)\times(+9)\\ &=-18\end{aligned}$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\left(-\frac{1}{3}\right)\times\left(-\frac{1}{3}\right)=+\frac{1}{9}$$

답 -18

문제 9 다음을 계산하여라.

(1) $6\times\left\{(-2)^3\div(11-5)-\frac{1}{3}\right\}$

(2) $\left\{\left(-\frac{1}{5}\right)^2\times 75+(-4)\right\}-5\div\left(-\frac{1}{3}\right)$

2. 일차방정식

문제 9 다음 일차방정식을 풀어라.

(1) $0.3(x-1)=0.2(x+4)$　　(2) $\frac{1}{2}(2-x)+\frac{1}{4}x=-\frac{1}{3}x$

(3) $0.1x-\frac{1}{2}=0.6$　　(4) $\frac{2x-1}{4}-0.2x=\frac{1}{5}(x-2)$

문제 9의 (3), (4)는 단원의 전제를 함수의 활용으로 제한하였기 때문에 실생활에는 없는 계산 연습을 위한 방정식이다.
그 외에도 문자의 사용과 식의 값, 일차식의 계산 등의 단원도 함수를 가르치는 데 필요한 정도로만 다룸으로써 계산 연습의 양을 충분히 줄일 수 있을 것이다.

라. 맺는 말

현재 2015 개정 교육과정 토론회 자료를 보면 중학교 2학년의 곱셈공식이 중학교 3학년의 이차방정식으로 이동한다. 하지만 고등학교 이차함수의 내용이 중학교 3학년에 추가되고, 통계 단원에 상관관계가 추가되면서 중학교 3학년의 학습량 증가로 인한 학생들의 부담은 불가피해 보인다. 특히, 중학교 3학년은 주당 3시간(1, 2학년은 4시간)이고, 고등학교 진학을 위한 입시로 11월에 기말고사가 있다는 것을 감안한다면 적은 양의 증가도 큰 부담으로 작용할 것이 분명하다. 따라서 위에서 제시한 형태의 통합으로 학습량을 감축하고, 단원들을 긴밀하게 연결하지 못한 채 개정하려는 현재의 방향은 매우 우려스럽다.
초등학생들과 마찬가지로 중학생들은 1학기에는 방정식의 계수가 소수나 분수인 경우라든가 연립방정식이라도 계수가 소수나 분수가 섞여있고, 복잡한 계산을 시킬 때 수업에서 소외되고, 함수에 이르면 수학을 포기하는 지경에 이르게 된다. 이런 현상을 막으려면 방정식이 함수에 포함되어야 한다. 이와 같은 시도가 수포자로 인하여 학생들을 고려하지 않은 교육과정, 학생들을 소외시키는 수학이라는 오명을 벗게 되는 계기가 되기를 바란다.

2. 논증 기하 지도 시기

가. 논리 교육의 필요성과 중학교 교과서 기하 영역의 문제점

논리적 사고력은 수학에서 강조하는 학습 목표 중 하나다. 수학교육에서 핵심역량에 해당하는 추론 능력은 논리적 사고력과 관련성이 깊다. 우정호(2005)는 수학을 하는 것은 추론하는 것이요, 수학에 의미를 주고 수학적인 힘의 근원이 되는 것은 추론 능력이며, 수학 교육의 주요 목적의 하나는 발견의 논리인 귀납과 유추에 의한 강력한 정당화의 논리인 연역적 추론 능력을 개발하는 것이라 보았다. 나귀수(1998)도 증명은 학교수학에 있어서 학생들의 연역적 추론 능력을 개발하고 수학의 이해를 증진시키는 데에 그 의의가 있다고 하였다. 수

학적 사고의 정상적인 발달을 위해서 논증기하교육은 빠뜨릴 수 없는 것이므로 의미 있는 기하교육의 방안을 찾는 것이 필요하다. 논리적인 추론 능력은 기하학적 직관 능력을 바탕으로 하여 향상시키는 것이 수학교육의 일반적인 방향이라고 할 수 있다.

추론 능력이 중요하지만, 문제는 추론 능력 발달을 위해 지극히 높은 추상적 사고를 요하는 형식적인 증명을 가르치는 시기다. 우리나라는 오랫동안 중학생들에게 형식적인 증명을 가르쳐왔으며, 최근 2009 개정 교육과정에서 증명을 표면적으로는 고등학교로 올린 것처럼 되어 있지만 실제로는 아직도 중학교 교과서에 남아 있다는 것이 밝혀졌다.
서동엽(1992)은 수학 교육과정에서 엄밀한 증명을 강조하는 것은 수학적 사고의 본질을 반영하는 것이 아니며, 수학교육에서 어떤 정리와 그 증명을 지도할 때 중요시되어야 할 것은 증명의 형식적인 정확성보다는 그 정리가 가지고 있는 아이디어라고 하였다. 우정호(2005)는 엄밀하게 논리적인 것은 전문가의 정신에 적합한 것이며, 사고가 성숙되기 전에는 바람직하지 않고, 기성의 세련된 연역적 지식 체계를 초보자에게 부과하는 것은 암기를 요구할 뿐이라고 하였다. 증명을 지도하려면 엄밀한 연역적 전개를 통한 증명보다 먼저 학생들에게 도형의 성질에 대한 추측과 발견을 통해 증명의 필요성과 필연성을 인식시키는 것이 필요하다. 그런 이후에 증명을 구상하는 과정을 거친 다음 증명 과정을 명확히 기술할 수 있다. 그러나 오늘날 학교수학에서 증명은 이러한 수학적 사고 방법으로서의 의미를 살리지 못하고 다분히 피상적 · 형식적으로 지도되고 있으며, 대부분의 학생들은 단지 기계적인 방법으로 증명을 암기하고 있다는 문제점이 제기되어 왔다고 지적했다.

미국을 비롯한 많은 나라들은 형식적 증명을 대부분 고등학교에서 다루고 있다. 미국의 NCTM(National Council of Teachers of Mathematics, 미국수학교사협회)의 Standards 2000에서는 학생들의 기하 영역의 학습 목표(기하 규준)로 다음 네 가지를 들고 있다.

- 이차원, 삼차원 도형의 특징과 성질을 분석하고, 기하 관계에 대해 수학적으로 논쟁할 수 있다.
- 좌표 기하와 다른 표현 체계를 이용하여 위치를 확인하고 공간적 관계를 기술할 수 있다.
- 수학적 상황을 분석하기 위해 변환을 적용하고 대칭을 활용할 수 있다.
- 문제를 해결하기 위해 시각화, 공간적 추론, 기하 모델링을 활용할 수 있다.

이 중 우리나라 중학교 기하 영역에 해당하는 것은 첫 번째와 네 번째 항목이다. 이 두 항목의 중학교에 해당하는 미국의 6-8학년의 규준을 살펴보면 다음 〈Ⅳ-5〉와 같다.

〈표 Ⅳ-5〉 미국 6-8학년의 기하 영역 규준(Standards, 2000)

기하 규준	6~8학년 규준
• 이차원, 삼차원 도형의 특징과 성질을 분석하고, 기하 관계에 대해 수학적으로 논쟁할 수 있다.	• 정의와 성질을 이용하여 이차원, 삼차원 대상들 사이의 관련성을 정확하게 기술하고 분류하고 이해할 수 있다. • 닮은 도형의 각, 변의 길이, 둘레, 넓이, 부피 사이의 관련성을 이해할 수 있다. • 합동, 닮음, 피타고라스 정리 등의 기하 개념과 관련성에 관한 귀납적 논쟁과 연역적 논쟁을 만들고 비판할 수 있다.
• 문제를 해결하기 위해 시각화, 공간적 추론, 기하 모델링을 활용할 수 있다.	• 변의 길이, 각의 크기와 같은 특별한 성질을 갖는 기하적 대상을 그릴 수 있다. • 겉넓이, 부피 같은 문제를 시각화하여 해결하기 위해 삼차원 도형의 이차원 표현을 활용할 수 있다. • 수적 관련성, 대수적 관련성을 표현하고 설명하기 위해 기하 모델을 이용할 수 있다. • 예술, 과학, 일상생활 등의 교실 밖 영역에서 기하 개념과 관련성을 인식하고 적용할 수 있다.

‘기하 관계에 대해 수학적으로 논쟁할 수 있다.’는 기하 규준에 대하여 중학교에서는 ‘합동, 닮음, 피타고라스 정리 등의 기하 개념과 관련성에 관한 귀납적 논쟁과 연역적 논쟁을 만들고 비판할 수 있다.’고 구체적으로 밝히고 있다. 기하 개념과 그 개념 사이의 관련성에 대해서 수학적으로 논쟁하는 것이 논리 교육이라고 할 수 있다. 이렇듯 수학은 논리와 논증을 요한다. 수학 교육은 단순히 수학적 지식을 전달하는 것에 그치는 것이 아니라, 수학적인 사고 활동을 통해 학생들이 보다 논리적으로 사고하고 생각할 수 있게 도와주는 것이다. 수학에서 논리적 사고 능력을 기르는데 많은 부분을 차지하는 것이 기하와 증명이다.
그러나 미국의 중학교에서의 연역적 논쟁은 추측까지라고 보는 것이 타당하며, 이후 고등학교에서 보다 형식적인 증명을 할 수 있는 준비 단계에 불과하다. 중학교에서는 소프트웨어 등을 활용하여 사실을 확인하는 정도로만 다루고 있다. 그것은 형식적인 증명에 대한 중학생들의 이해력이나 인지 발달 수준을 감안하여 지도하지 않고 있는 것이라 볼 수 있다.

우리나라는 2007 개정 교육과정까지는 형식적인 증명을 중학교의 교육과정으로 여기고 가르쳤지만, 2009 개정 교육과정에서는 주요 개정 내용에 다음 〈표 Ⅳ-6〉과 같이 밝히면서 증명이라는 용어를 중학교에서 삭제했다.

〈표 Ⅳ-6〉 2009 교육과정 주요 개정 내용 중 '증명' 관련 부분 발췌

(중학교) 기하 영역에서 기하학적 성질의 이해를 위해 형식적 체계를 강조하는 증명보다는 학생의 경험적 지식에 바탕을 둔 정당화를 강조하도록 하였다. 기하 교육은 형식적 증명보다는 학생의 이해 수준에 입각한 정당화 수준의 교육을 지향한다. 중학교 수학에서의 증명 교육은 기대하는 만큼의 효과를 거두지 못하고 있음이 알려져 있다. 그 이유는 학생들이 기하에서 다루는 개념에 대한 지식이 부족한 탓도 있겠지만, 공리 체계 내에서 논리 규칙에 따라 명제들을 체계적으로 연결시키데 어려움을 느끼기 때문이다. 기하 영역은 학생들이 도형을 탐구하여 기하적 성질을 이해하고 이를 통해 추론 능력을 신장시키는 것을 목표로 한다. 또한 기하학적 성질을 이해하고 그 지식을 습득하는 방법에 있어서, 학생 활동을 중시하고 형식적이고 엄밀한 증명 대신 추측활동을 강조한다. 이는 증명을 하기 위해 익숙해야 하는 용어와 기호의 사용이나 형식 논리 규칙의 이용에서 생기는 어려움을 줄이고 학생의 기하 지식에 기초한 추론 활동을 강화하는 것이다. 정당화에 의한 기하 교육을 위하여, '증명할 수 있다'를 대신하여 '이해하고 설명할 수 있다'로 제시하였다.

'이해하고 설명할 수 있다'는 것은 '정당화(justification)'를 의미하는 것인데, 정당화를 실험에 의한 정당화, 증거에 의한 정당화, 그리고 논리적 연역법인 수학적 증명 등 세 가지로 나누어 제시하고 있다. 여기서 문제가 되는 것은 세 번째 제시한 '논리적 연역법인 수학적 증명'이다. 이것은 정당화의 한 방법일 수는 있지만 중학교에서 증명을 없애고 고등학교의 증명을 강화했으면 '논리적 연역법인 수학적 증명'은 중학교에서 지양하도록 강제했어야 한다. 하지만 이것을 교과서 집필자들의 판단에 맡겨둔 결과 모든 교과서가 절반 정도를 여전히 '논리적 연역법인 수학적 증명'으로 채우고 있다.

증명 지도의 목적 중의 하나가 논리적, 비판적 사고의 함양임에도 불구하고, 만약 학생이 증명을 이해하지 못한 채로 암기하는 수준에서 학습이 이루어진다면 이는 원래 목적에 부합하지 않는 것이다. 증명은 증명 자체가 중요한 것이 아니라 그 과정을 충분히 이해하고, 정확하게 사용할 줄 아는 능력이 중요한 데, 증명 자체가 어려워서 증명의 본질을 이해하는 것이 쉽지 않다는 것이 교육적으로 문제라는 것이다. 증명 자체의 필요성을 부정하는 취지가 아니다. 지금 중학교 수학 교육과정에서 기하 영역은 표면적으로는 증명을 삭제했다고는 하지만, 교과서가 과거의 증명을 그대로 포함하고 있어서 증명이 삭제되었다고 말할 수 없다. 학생들은 여전히 수학자 수준의 엄밀한 증명을 학습하고 있는 것이나 다름이 없다.

나. 중학교 기하 교육 실태

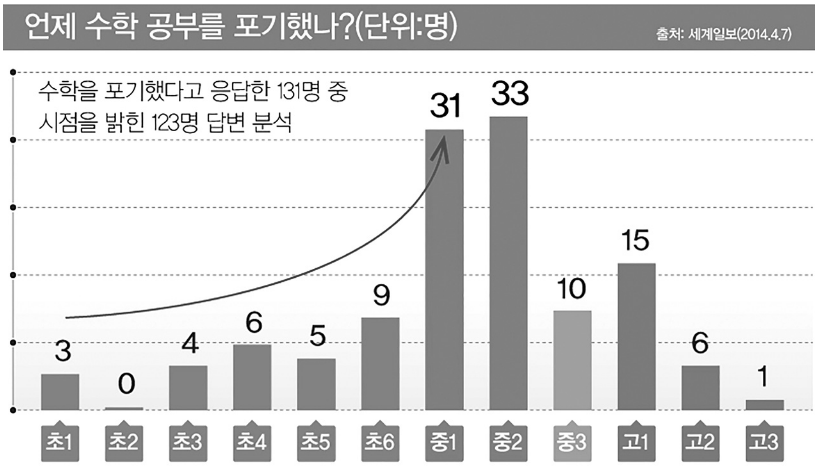
1) 학생들이 논증기하에서 겪는 어려움

서동엽(1999)은 증명학습에서 나타나는 중학생들의 오류 유형을 분석해서 다음과 같이 제시했다.

(1) 문장과 기호의 측면에서 나타나는 오류 – 문장으로 주어진 명제를 다시 기호로 표현하는 것을 매우 어려워함.
(2) 정의와 성질의 측면에서 나타나는 오류 – 정의와 성질의 구분 어려움.
(3) 그림을 이용할 때 나타나는 오류 – 그림을 그리고 가정에 제시된 내용만을 표시하지 않고 알고 있는 모든 사실, 또는 결론의 내용들을 그림에 나타낸다.
(4) 검토의 다양성 및 완전성의 부족에서 나타나는 오류 – 합동조건을 알고 있지만 합동인 두 삼각형 찾는데 어려움.
(5) 반례를 이용한 반증에 대한 이해의 부족 – 반례의 명시적 지도 필요. 반례 이용 꺼림.
(6) 가정(假定)의 기능 측면에서 나타나는 오류 – 증명의 첫 단계는 가정에서 출발하는 것인데, 가정이 아닌 다른 일반적인 사실이나 결론에서 출발하는 경향을 보여주는 학생들이 많다.

대부분의 학생들이 이런 오류를 범하고 있으므로 증명학습은 사실상 불가능하다고 할 수 있다. 중학생들 중에는 유독 기하의 증명 부분에서 학습에 애로를 겪고 학생들이 많다. 1학기에는 수학 수업에 열정적으로 참여하던 학생이었는데 2학기에 논증기하 수업에 들어가면서부터 점점 수업에 참여하는 열의가 떨어지는가 싶더니 어느 순간부터 수업에 참여하지 못하고 있는 사례가 종종 발생한다. 2005년에 서울의 한 중학교 2학년 수학 수업을 1년 내내 빠짐없이 관찰한 적이 있었는데, 1학기 수업에서는 발표하고 참여하는 비율이 절반이 넘었지만 2학기 기하 영역에 들어가면서부터 참여하는 학생이 5명 이내로 줄어들었다.
2014년 4월 초의 세계일보 보도에 따르면 수포자 발생 시기가 집중되는 때가 중학교 1, 2학년이다. ‘수학을 포기했다’는 응답률이 초등학생은 1%대에 머물렀으나 중3 11.5%, 고3 12.0%로 치솟았다. ‘수포자가 될 가능성이 높다’는 응답률 역시 초등 5학년 9.7%에서 중3 26.8%와 고3 22.6%로 껑충 뛰었다. 중 · 고교생의 경우 10명 중 3~4명이 사실상 수포자에 해당하는 셈이다. 특히 이들이 수학을 어렵게 느끼기 시작하거나 수학을 포기한 시점이 ‘중학 시절’에 집중되는 등 대다수 학생이 중학교 때 ‘수학의 고비’를 맞는 것으로 나타났다. [그림 Ⅳ-7]을 보면 수포자 중 중학교 2학년 이전에 수학을 포기한 비율이 74%나 된다.

[그림 Ⅳ-7] 수포자 중 수학을 포기한 시점 조사 자료(세계일보)



중학생이 수학을 포기하게 만드는 원인 제공은 1학기 과정에서는 복잡한 방정식(계수가 정수가 아니라든가 괄호를 포함하는 연립방정식 등)과 함수가 될 수 있지만 2학기 과정에서 배우는 논증기하일 가능성이 크다. 논증기하가 어려운 것은 형식적으로 엄밀한 증명, 즉 주어진 가정과 이미 알고 있는 수학적 사실로부터만 결론을 유도해야 한다는 것 때문이다. 학생들에게는 주어진 가정뿐만 아니라 수학적 사실, 즉 수학적 배경 지식을 총동원해야 하는데, 배경 지식이 부족하기 때문이다. 가정은 눈에 보이기라도 하지만 명시적으로 표현된 가정 이외에도 배경으로 필요한 수학적 지식이 너무나도 많기 때문에 학생들에게 부담을 안겨 준다.

여러 가지 연구에서도 기하 영역의 논증이 얼마나 학생들에게 얼마나 큰 어려움을 안겨주는가를 밝히고 있다.
삼각형의 내각의 합이 180°라는 정리와 평행사변형의 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같다는 기본적인 정리에 대한 증명을 이해하고 있는 학생은 전체의 35% 정도에 불과한 것으로 드러났다(우정호, 2005). 삼각형의 내각의 합이나 평행사변형의 성질은 그야말로 기본적인 정리에 불과하다. 복잡하고 어려운 것도 아니지만 막상 증명이라고 해서 논리적 엄밀성을 요구하게 되면 반응은 급격하게 달라진다. 이것은 증명을 완전히 이해하고 받아들일 수준이 되지 않았는데도 지도가 이루어지고 있다는 것을 말한다. 증명쓰기를 학습하는 10학년의 기하 과정을 마친 미국 고등학교 학생들의 25%가 전연 증명쓰기를 할 수 없었으며, 25%가 간단한 증명만을 할 수 있었고, 20%가 좀 더 복잡한 증명을 할 수 있었으며, 30%만이 교과서의 정리나 연습문제로 나오는 것과 유사하게 증명하였다. 학생들은 증명하려는 정리를 증명에 사용하며 타당하지 않은 추론 형식을 사용하는 등 주장에서 논리적 언어적 어려움을 겪

으며, 여러 가지 삼각형과 보조선이 포함되는 증명을 매우 어려워하며 합동의 증명보다 닮음의 증명을 더 어려워하였다.
연역적 추론 능력의 발달에 대한 이러한 여러 연구 결과는 중학교 학생들의 형식적 사고의 발달과 증명지도의 가능성을 확인해 주고 있으나, 아울러 고등학교가 아닌 중학교 2학년에서의 증명지도가 초래할 수 있는 근본적인 문제점을 드러내주고 있다.

Senk(1985)는 1년 동안 기하 과정에서 증명을 배운 1520명의 학생들을 대상으로 증명 능력을 조사하였다. 증명을 배운 학생들의 30%만이 75% 숙달 정도의 증명 쓰기에 도달한다고 결론지었다. 근거를 제시해야 하는 간단한 증명에서는 70%의 학생들이 옳게 수행하였고, 32%의 학생들이 직사각형의 대각선의 길이가 같음을 증명할 수 있었고, 6%의 학생들이 삼각형의 합동 조건으로부터 직접 이끌어내어지지 않는 약간 어려운 정리를 증명하였다. Senk의 연구에서 제시된 테스트를 완전하게 수행한 학생은 전체의 3%에 불과했으며, 완전한 증명을 요구한 12문제 중에서 3문제에 대해서만 절반 정도의 학생들이 성공하였다. 또한 Brumfeld는 속진 기하 과정을 이수한 다음 해에 고등 기하 과정을 공부한 52명의 학생들을 조사한 결과, 81%의 학생들은 증명을 시도하지도 못했으며, 증명을 시도한 학생들의 10%만이 옳게 증명하였다(추지영, 2009에서 재인용).
박병호(2003)는 학교수학에서 기하교육의 목적을 학생들의 기하학적 직관을 키우고 논리적 추론 능력을 향상시키는데 두고 있음에도 불구하고, 현재의 교실 수업은 학생들의 탐구 활동보다는 유클리드 기하의 논리적 증명이나 형식적 내용들만을 지나치게 강조하고 있어 학생들이 기하를 어려워하게 되는 주된 요인이 되고 있다고 지적하고 있다. 우리의 교수 · 학습 과정은 연역적 증명에 치우쳐 있어 학생들이 스스로 추정하거나 탐구하는 활동이 배제되어 있다. 물론 유클리드 기하의 논리적 증명이 중요하지만 이러한 구성은 학생들에게 흥미를 느끼게 하고 수학의 유용성을 인식하게 하는 데에는 역부족이다.
중학교 기하 교육과정의 문제는 직관기하와 형식기하를 극단적인 이원론적 체계로 다룸으로서 기하학의 두 가지 측면이 단절되어 있으며 연역적 체계를 논리의 완성으로 보고 평면 논증 기하의 형식적인 취급만을 강조하고 있다는 데에 있다. 현재 중학교 1학년에서의 직관기하는 중학교 2, 3학년에서 다룰 평면논증기하를 위한 수단으로서 다루어지고 있고, 평면논증기하는 연역적 체계의 재발견 과정이 생략된 채 추상화되고 형식화된 증명을 암기하도록 강요되고 있다. 따라서 학생들은 기하학을 뛰어난 사람만이 할 수 있는 학문이며 현실과 전혀 별개인 증명 위주의 학문이라는 잘못된 인식을 갖게 되었다. 이로 인해 학교 수학에서 기하 교육은 그 중요성에도 불구하고 교사와 학생들이 가장 어렵고 흥미 없고 부담스러운 부분으로 인식하게 되었다.

2) 증명은 아직 중학교에 남아 있다

우리나라는 2009 개정 교육과정에서 처음으로 '증명'이 중학교 교육과정에서 공식적으로 빠졌다. 우리나라에서는 '증명'으로 대변되는 논증기하는 그동안 중학교 2학년부터 가르치기 시작했으며, 2009 개정 교육과정에서부터 증명은 고등학교 교육과정으로 간주되었다. 그래서 2009 개정 중학교 수학과 교육과정에서 '증명할 수 있다.'라는 학습 요소를 '이해하고 설명할 수 있다.'로 수정했지만 교과서에는 증명 과정이 변함없이 그대로 실려 있고, 학생들은 그 형식적인 논리를 충분히 이해하지 못해 수학에 대한 흥미를 저하시키는 원인으로 남아 있다.

수포자가 가장 많이 발생하는 중학교의 경우, 수포자의 주된 이유 중 하나는 중학교 2학년 때부터 배우는 기하 영역의 형식적 증명이다. 다른 나라의 경우, 이 부분을 추상적 사고가 활발한 고등학교 때 가르치고 있음에 비해 우리의 경우에는 중학교 때 앞서 배움으로 학생들의 수학에 대한 흥미도와 자신감을 빼앗아가고 있었다. 물론 지금의 학교 교과서에는 가정, 결론 등의 증명 용어를 직접적으로 사용하지는 않지만 실제 교과서에 실린 문제에는 형식적 증명이 고스란히 남아 있다. 다음 [그림 Ⅳ-8]은 2007 개정 교육과정의 중학교 교과서에 나오는 증명 과정이다. 2007 개정 교육과정에서 증명은 중학교 학습 요소였다.

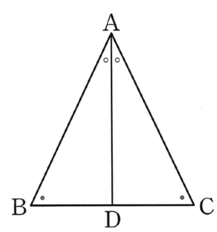
[그림 Ⅳ-8] 2007 교육과정 중학교 교과서 : '증명하여라.'

예제 1 $\triangle ABC$에서 $\angle B=\angle C$이면 $\overline{AB}=\overline{AC}$임을 증명하여라.

증명 [가정] $\triangle ABC$에서 $\angle B=\angle C$

[결론] $\overline{AB}=\overline{AC}$

[증명] 오른쪽 그림과 같이 $\angle A$의 이등분선과 $\overline{BC}$의 교점을 D라고 하면



$\triangle ABD$와 $\triangle ACD$에서

$\angle B=\angle C$ (가정)

$\angle BAD=\angle CAD$ ······ ①

삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로

$\angle ADB=\angle ADC$ ······ ②

$\overline{AD}$는 공통인 변 ······ ③

①, ②, ③에 의해 한 변의 길이가 서로 같고, 그 양 끝각의 크기가 각각 서로 같으므로 $\triangle ABD\equiv\triangle ACD$이다.

따라서 $\overline{AB}=\overline{AC}$이다.

그런데 2009 개정 중학교 교육과정에서 '증명'은 삭제되었다. 그 대신 '증명할 수 있다.'는 성취 기준이 '이해하고 설명할 수 있다.'로 바뀌었다. 자세히 비교하면 '증명하여라.'가 '이유를 설명하여라.'라고 바뀐 것 외에 아무 것도 없다. [그림 Ⅳ-9]는 증명이 실질적으로 남아 있는 근거라고 할 수 있다.

[그림 Ⅳ-9] 2009 교육과정 중학교 교과서 : '그 이유를 설명하여라.'

예제 1 $\triangle ABC$에서 $\angle B=\angle C$이면 $\overline{AB}=\overline{AC}$이다. 그 이유를 설명하여라.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $\angle A$의 이등분선과 $\overline{BC}$의 교점을 D라고 하면

$\triangle ABD$와 $\triangle ACD$에서

$\angle B=\angle C$

$\angle BAD=\angle CAD$ ……①

삼각형의 세 내각의 크기의 합은 $180°$ 이므로

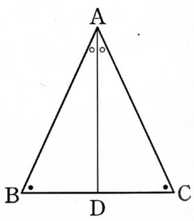
$\angle ADB=\angle ADC$ ……②

$\overline{AD}$는 공통인 변 ……③

①, ②, ③에서 한 변의 길이가 서로 같고, 그 양 끝각의 크기가 각각 서로 같으므로

$\triangle ABD\equiv\triangle ACD$

따라서 $\overline{AB}=\overline{AC}$이다.

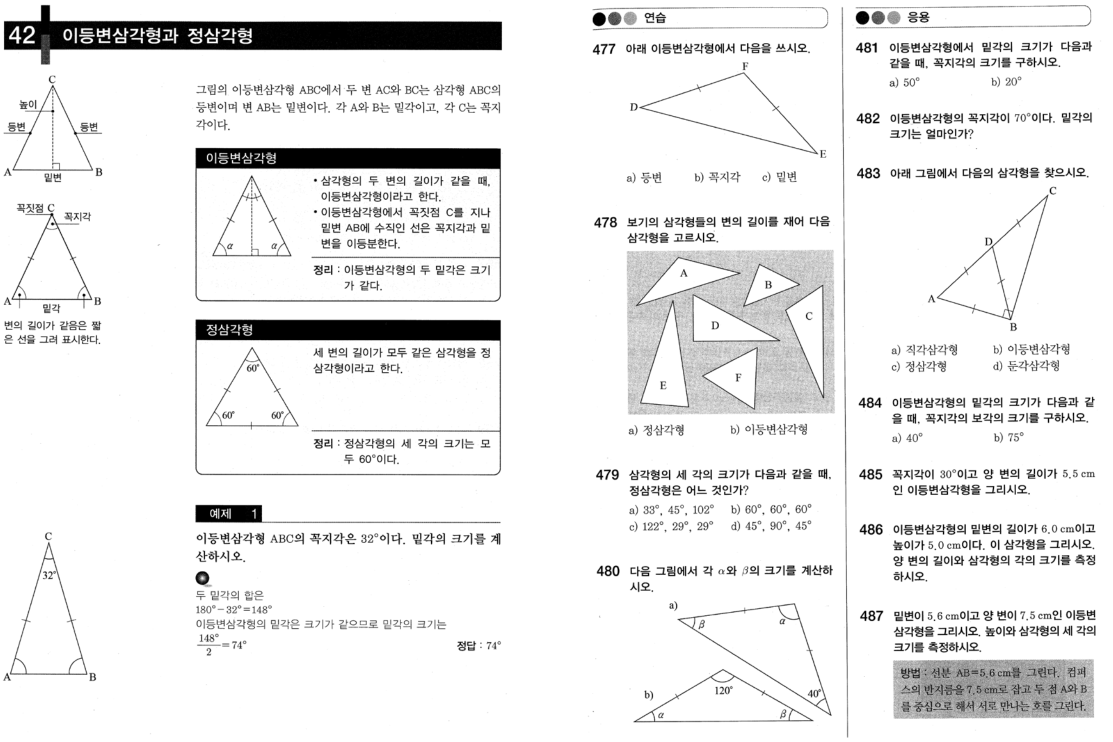


3) 다른 나라 사례들

중학교 교육과정에서 '증명'을 삭제한 그 이유는 학생들이 공리 체계 내에서 논리 규칙에 따라 명제들을 체계적으로 연결시키데 어려움을 느끼기 때문이라고 했다(신이섭, 황혜정 외, 2011). '증명'이 중학생들의 인지 발달에 맞지 않는다는 국제적인 추세를 따른 것이라고 볼 수 있다. 일본을 제외하고 대부분의 나라는 형식적으로 정확한 '증명'을 하는 논증기하를 고등학교에서 취급한다. 일본은 우리와 비슷한 시기에 증명을 다루고 있으나 대부분의 다른 나라는 중학교에서는 도형의 성질을 직관적으로 이해한 것을 바탕으로 문제를 해결하고 본격적인 논증기하는 고등학교에서 다루고 있다.

중학교에서 이등변삼각형을 배우는 핀란드 교과서를 보자. 핀란드 중학교 교과서는 현재 우리나라에 번역되었다. 다음 [그림 Ⅳ-10]은 이등변삼각형을 학습하는 7학년 교과서다.

[그림 Ⅳ-10] 핀란드 중학교 교과서 : 이등변삼각형

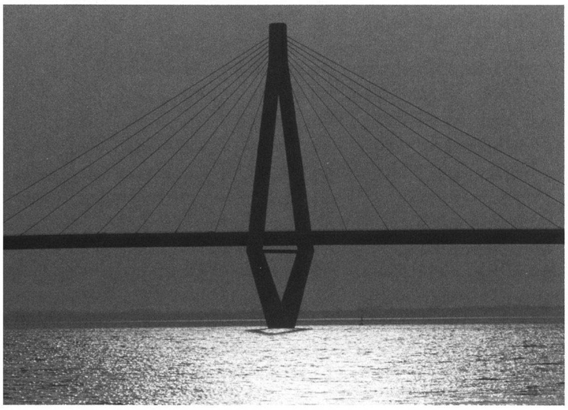


핀란드 중학교 교과서에서는 이등변삼각형과 정삼각형을 정의하고 관련된 정리를 직관적으로 제공하고 있다. 학생들은 주어진 정의와 정리를 직관적으로 이해하고, 이를 이용하여 문제를 해결하는 과정을 학습하게 된다. 형식적인 증명 과정을 수행하지 않았어도 직관적으로 이해할 수 있다. 학생들은 뻔한 사실이나 이미 알고 있는 내용을 증명하는 것을 이상하게 생각한다. 예를 들면, 정삼각형의 한 내각의 크기는 60°라는 사실은 초등학교 때부터 익히 알고 사용해온 지식인데, 중학교 2학년에 와서 갑자기 그 사실을 증명하라는 문제를 보고 당황하는 반응을 보이는 학생들이 많다.

독일 교과서도 마찬가지다.

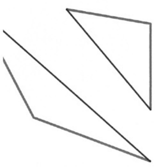
[그림 Ⅳ-11] 독일 중학교 교과서 : 이등변삼각형

3 Das gleichschenklige Dreieck



1
Eine Brücke wird von mehreren Stahlseilen gehalten, die oben an einer zweibeinigen Stütze befestigt sind. Die Stütze befindet sich in der Flussmitte zwischen den beiden Fahrbahnen.
Beschreibe die besondere Anordnung der Halteseile.
Was soll mit dieser Anordnung wohl erreicht werden?

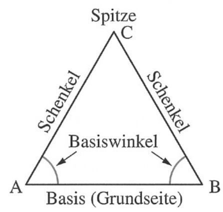
2
Wie kann man aus einem Blatt Papier ein Dreieck mit zwei gleich langen Seiten ausschneiden, wenn nur eine Schere zur Verfügung steht?



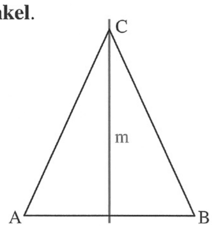
chschenklige Dreiecke

nnere dich an den Satz den Achsenpunkten.

Ein Dreieck mit zwei gleich langen Seiten heißt **gleichschenkliges** Dreieck.
Die beiden gleich langen Seiten nennt man Schenkel, die dritte Seite heißt **Grundseite** oder **Basis**. Der gemeinsame Punkt der Schenkel wird als Spitze bezeichnet, die beiden an der Basis anliegenden Winkel heißen **Basiswinkel**.

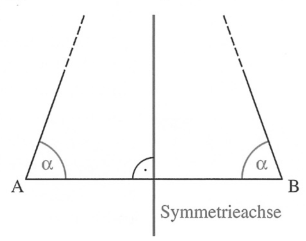


$\overline{AC} = \overline{BC}$



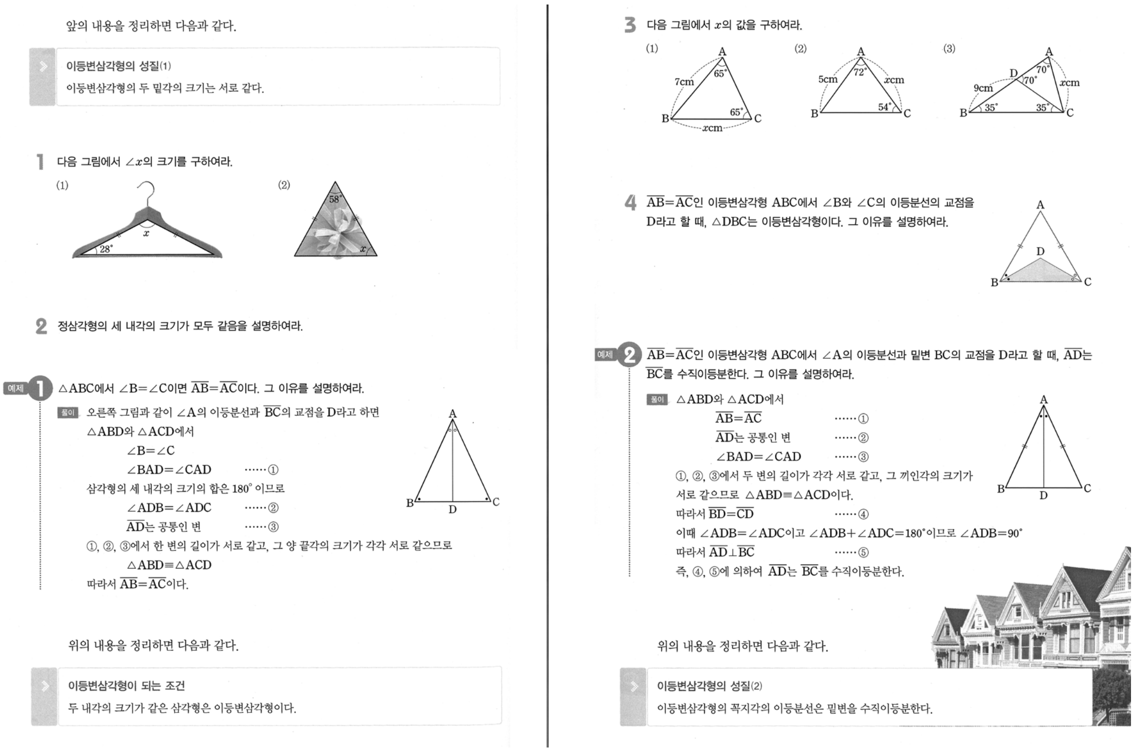
Jedes gleichschenklige Dreieck ist auch achsensymmetrisch, denn:
Da die Spitze C von den Punkten A und B gleich weit entfernt ist, liegt sie auf der Symmetrieachse m zu A und B. Das Dreieck ABC ist also symmetrisch zu m.
Daraus folgt: In jedem gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich groß.
Umgekehrt ergibt sich aus der Achsensymmetrie eines Dreiecks, dass es gleichschenklig ist und seine Basiswinkel gleich groß sind.

Hat nun ein Dreieck zwei gleich große Winkel so folgt, dass es achsensymmetrisch ist und somit gleichschenklig. Dies lässt sich so begründen:
In der nebenstehenden Figur sind die Winkel bei A und B gleich groß. Die Symmetrieachse zu A und B ist daher zugleich Symmetrieachse für die Schenkel dieser beiden Winkel. Diese müssen sich also in einem Punkt C auf der Achse schneiden.
Das bedeutet: Das Dreieck ABC ist achsensymmetrisch, also auch gleichschenklig.



[그림 Ⅳ-11]에서 보면 이등변삼각형에 대해서 정의를 하고 그 성질을 직관적으로 이해하도록 제시하고 있다. 증명을 전혀 하지 않고 당연한 것으로 받아들이고 있다. 여기 반해서 우리나라 중학교 교과서에서는 증명이라는 용어는 사용하지 않지만 엄격한 형식의 논리 교육을 그대로 하고 있다. 다음 [그림 Ⅳ-11]의 우리나라 교과서를 보라.

[그림 Ⅳ-12] 우리나라 중학교 교과서 : 이등변삼각형


앞의 내용을 정리하면 다음과 같다.

이등변삼각형의 성질(1)
이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 서로 같다.

1 다음 그림에서 $\angle x$의 크기를 구하여라.

(1) (2)

2 정삼각형의 세 내각의 크기가 모두 같음을 설명하여라.

예제 1 $\triangle ABC$에서 $\angle B=\angle C$이면 $\overline{AB}=\overline{AC}$이다. 그 이유를 설명하여라.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $\angle A$의 이등분선과 $\overline{BC}$의 교점을 D라고 하면
$\triangle ABD$와 $\triangle ACD$에서
$\angle B=\angle C$
$\angle BAD=\angle CAD$ ……①
삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180° 이므로
$\angle ADB=\angle ADC$ ……②
$\overline{AD}$는 공통인 변 ……③
①, ②, ③에서 한 변의 길이가 서로 같고, 그 양 끝각의 크기가 각각 서로 같으므로
$\triangle ABD\equiv\triangle ACD$
따라서 $\overline{AB}=\overline{AC}$이다.

위의 내용을 정리하면 다음과 같다.

이등변삼각형이 되는 조건
두 내각의 크기가 같은 삼각형은 이등변삼각형이다.

3 다음 그림에서 x의 값을 구하여라.

(1) (2) (3)

4 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC에서 $\angle B$와 $\angle C$의 이등분선의 교점을 D라고 할 때, $\triangle DBC$는 이등변삼각형이다. 그 이유를 설명하여라.

예제 2 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선과 밑변 BC의 교점을 D라고 할 때, $\overline{AD}$는 $\overline{BC}$를 수직이등분한다. 그 이유를 설명하여라.

풀이 $\triangle ABD$와 $\triangle ACD$에서
$\overline{AB}=\overline{AC}$ ……①
$\overline{AD}$는 공통인 변 ……②
$\angle BAD=\angle CAD$ ……③
①, ②, ③에서 두 변의 길이가 각각 서로 같고, 그 끼인각의 크기가 서로 같으므로 $\triangle ABD\equiv\triangle ACD$이다.
따라서 $\overline{BD}=\overline{CD}$ ……④
이때 $\angle ADB=\angle ADC$이고 $\angle ADB+\angle ADC=180°$이므로 $\angle ADB=90°$
따라서 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$ ……⑤
즉, ④, ⑤에 의하여 $\overline{AD}$는 $\overline{BC}$를 수직이등분한다.

위의 내용을 정리하면 다음과 같다.

이등변삼각형의 성질(2)
이등변삼각형의 꼭지각의 이등분선은 밑변을 수직이등분한다.

[그림 Ⅳ-12]를 보면 이등변삼각형에 관한 여러 명제를 증명하고, 그 역인 명제까지 증명하고 있다. 여기서 중요한 것은 이등변삼각형의 두 밑각의 크기가 같다는 사실이다.

다. 개선 방안

1) 초등학교 도형과 중학교 도형의 통합과 나선형 결합

초등학교와 같이 중학교에서도 도형 영역의 지도 방법이 직관적이어야 한다. 초등학교와 중학교 기하 영역을 통합하여 나선형으로 중복해서 지도하는 방안을 마련해야 한다. 논리적으로 엄밀한 증명을 하여 학생들에게 부담을 주는 부분을 과감하게 삭제하고, 중학교에서도 도형의 성질을 이용하여 여러 가지 문제를 해결하는 용도로 기하를 학습하는 것이 기하의 필요성을 느낄 수 있도록 하는 데 유용하다. 그리고 기하를 통해서 가르칠 수 있는 수학적 과정을 충분히 경험하도록 체험 활동 위주로 구성하는 것이 필요하다.

2) 논증기하는 고등학교 선택과목으로

중학교에서 확실하게 엄밀한 형식적 증명을 요하는 논증기하는 교육과정에서 제외하든가 고등학교 선택과목 정도가 좋다. 추지영(2009) 등 많은 연구 결과는 중학교 기하 지도는 기본적인 도형의 성질에 대한 극히 간단한 증명만을 다루는 초보적인 연역적 사고 수준에 머물러야 하며, 현재와 같은 논증기하의 지도는 그 상당한 부분을 고등학교로 옮겨야 한다고 주장하고 있다. 이해가 결여된 상태에서의 증명을 암기하도록 방치하는 것은 수학적 사고는 물론 건전한 비판적 사고와 합리적이고 반성적인 사고의 개발을 크게 저해할 것이다.
수학적 사고의 자연스러운 발달을 위해서 논증기하의 교육적 가치는 과소평가되어서는 안되며 그 형식주의적인 증명 교육의 관행을 극복하는 문제가 새롭게 제기된다. 논증기하는 수학화 경험을 통해 학습되어야 할 것이며 특히 반성적 사고 과정이 중시되어야 할 것이다.

3) 기하교육에 소프트웨어의 사용 방안 모색

우리나라 교육과정에서 계산기나 소프트웨어 등의 공학 도구의 사용 규정은 선언적인 수준에 머물고 있다. 2009 개정 중학교 수학과 교육과정은 교수 · 학습상의 유의점 또는 교수 · 학습 방법에서 “공학적 도구나 다양한 교구를 활용하여 도형의 성질을 추론할 수 있게 한다.”, “공학적 도구를 활용하여‘ 함수의 그래프를 그리고 다양한 상황을 해석한다든가, 표와 그래프를 그리고 대푯값과 산포도를 구한다든가 도형의 성질을 추론할 수 있게 한다고 명시하고 있다. 또한 “계산 능력 배양을 목표로 하지 않는 경우의 복잡한 계산 수행, 수학의 개념, 원리, 법칙의 이해, 문제 해결력 향상 등을 위하여 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구와 다양한 교구를 활용한다.”라고 명시하고 있다.
선진국에서 기하교육은 일찍부터 소프트웨어를 이용하여 역동적인 수업을 해왔다. 지금은 스마트폰에서 사용할 수 있도록 여러 가지 기하 소프트웨어가 애플리케이션으로 개발되어 있으며, 컴퓨터를 사용하는 것도 가능하다. 소프트웨어를 이용하여 시각적인 효과와 시뮬레이션 효과를 이용한다면 기하 학습의 효과가 증진될 것이다. 시각화란 단순히 “그림을 통해 수학을 인식하는 것”이 아닌 수학적 개념을 이해하고 문제를 표현하기 위하여 적절한 도형을 그릴 수 있고, 이를 문제해결에 효과적으로 이용하는 과정인 것이다. 기하교육에서 멀티미디어의 활용은 학습 내용을 전체적으로 시각을 통해 파악하도록 도와주기 때문에 기하 개념을 지도하는 데 좀 더 직관적인 방법이라 할 수 있다.
기하교육에서 소프트웨어 사용이 정착되려면 교육과정에 규정된 대로 수학과의 평가에서 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구와 다양한 교구를 이용할 수 있는 기회를 제공해야 한다. 아직 우리나라는 계산기 등의 사용에 부정적이며, 소프트웨어 등 공학적 도

구를 사용할 수 있는 학교의 시설은 태부족이다.

3. 공학도구 이용 방안

가. 공학적 도구 이용의 필요성

1) 계산기는 필요하지만 사용할 수 없다?

2011년 5월19일 어느 신문의 기사에서는 "수학시험 전자계산기 허용 아직은 –학계 찬반양론, 전문가들 구성 본격 검토"라는 글이 실렸다. 아래는 그 기사의 내용이다.

『고교 수학시험에 전자계산기 사용을 허용하려던 교육과학기술부 안이 유보됐지만 이를 두고 논란이 일고 있다. 교과부는 19일 확정한 '공교육 강화–사교육 경감 선순환 방안'에서 '고교 수학시험에서 전자계산기 사용을 허용한다'는 내용을 제외했다.
지난 2월 시안에선 수학 교육을 암기나 계산 중심에서 논리적 · 창의적 사고능력을 키우도록 전환한다는 취지로 포함시켰던 내용이다.
교과부는 "전자계산기 허용안을 폐기했다는 의미는 아니고 6월부터 전문가그룹을 구성해 본격 검토할 계획"이라며 여지를 남겼지만, 교육계에서는 전자계산기 허용이 간단한 문제가 아니라고 보고 있다. 교과부에 따르면 수학교육 학자들은 초등학교 수준에서는 기초적인 계산 능력을 기르는 것이 중요하지만, 중학교부터는 단계적으로 계산기 사용을 허용하는 것이 바람직하다는 데 대체로 공감한다.
실제 미국에서는 1980년대 후반 계산기 허용방침을 둘러싸고 논란이 일다 1990년대 중반부터 수학수업과 대학수학능력시험(SAT)에서 계산기를 쓸 수 있게 하고 있다. 영국과 싱가포르 등도 계산기를 허용하고 있다. 반면 한국, 중국, 일본은 이를 허용하지 않는다. 국내 한 대학 교수도 "고교 수학시험에선 단순계산 능력이 아니라 고차원적 수학 사고력을 측정하는 것이 목적이고, 문제 풀이 과정에서 사칙계산은 비본질적 역할을 하기 때문에 계산기를 사용해도 무방하다"는 입장을 교과부에 전달한 것으로 알려졌다.
그러나 전자계산기를 선뜻 허용하기엔 걸림돌이 만만찮다. 우선 고교 수학시험에서 계산기를 허용한다면 교육당국이 일괄 지급할지, 학생 개인 부담으로 갖추도록 할지 결정해야 한다. 또 간단한 사칙연산만 가능한 사양을 허용할지, 보다 정교한 계산까지 가능한 사양을 허용할지, 시험 도중 예기치 않은 계산기 고장 문제엔 어떻게 대처할지 등 논란의 여지가 많다. 어느 단원에서 어떤 방식으로 계산기를 활용할 수 있도록 할 것인가도 문제고, 현행 교

육과정에 계산기 사용을 허용하는 근거도 모호하다.
교과부 관계자는 "2011학년도 수능시험에서 필기구를 이용한 부정행위를 막기 위해 수험생에게 한 자루씩 일괄 지급했던 샤프를 놓고 샤프심 불량 논란이 있었다."며 "전자계산기 허용 방안을 놓고 수능 불량 샤프심 논란이 연상돼 우려된다는 의견이 많고, 현장 교사들의 의견은 그다지 긍정적이지 않다'고 말했다.』(2011.05.19. 매일신문)

위의 기사내용은 계산기를 사용하는 것이 수학 학습에 도움이 되지만 평가에 사용하는 것은 연구 후에 결정하겠다는 것이다.

2) 공학적 도구의 다양한 활용

수학교육에서 활용 가능한 공학적 도구는 계산기, 인터넷, 컴퓨터와 그 응용 프로그램으로 구분할 수 있다. 계산기는 사칙 연산을 포함하여 수 계산을 할 수 있는 계산기와 함수식을 입력하면 그 함수의 그래프를 보여주는 계산기가 있다. 인터넷은 정보를 교환할 수 있도록 컴퓨터와 같은 전자 장치를 연결한 통신망을 의미한다. 인터넷을 통해 학습에 필요한 정보를 검색할 수 있으며, 교사와 학생, 학생과 학생 에 따라 프리젠테이션, 동적기하 소프트웨어, 스프레드시트, 기호조작 소프트웨어로 구분할 수 있다. 프리젠테이션은 학습 내용을 문자, 그림, 동영상으로 학생들에게 제시하기 위한 프로그램으로 PPT, 아이스크림, 한글 등이 여기에 해당한다. 동적기하 소프트웨어는 기하적 작도가 가능하고, 도형을 움직여 성질을 관찰할 수 있도록 하는 대표적인 프로그램으로 GSP, Cabri3D, Poly 등이 있다. 스프레드시트는 수치 자료 처리 기능을 가진 프로그램으로 수치 자료를 정렬, 계산, 그래프 표현 기능을 가지고 있다. Excel, Fathom 등이 이러한 프로그램에 속한다. 기호조작 소프트웨어는 대수 기호를 조작할 수 있는 프로그램으로, 식의 전개, 인수분해, 방정식 풀이, 미적분 등이 가능하며, 함수의 그래프를 그릴 수도 있다. 여기에 속하는 프로그램으로는 CAS, LiveMath 등이 있다(조은애, 2008; 이정례, 2010; 김주남, 2011; 손홍찬, 2011; 최지선, 2012에서 재인용).

그 동안 많은 연구(류희찬, 조완영, 1999; 류희찬, 유공주, 조민식, 2000; 장경윤, 황우형, 이중권, 2001; 정보나, 류희찬, 조완영, 2002; 황우형, 차순규, 2002; 정인철, 박달원, 장이채, 김태균, 2003; 최인자, 2005; 김남희, 2006; 이광상, 2007; 김혜선, 2008; 조은애, 2008; 이종학, 2011; 이진호, 2012)에서 수학 교과에서의 공학적 도구의 활용 방법이 제시되었다. 이 연구들에서 제시된 공학적 도구의 활용 방법은 학습보조수단, 이해함양수단, 수학적 탐구수단으로의 활용으로 분류될 수 있다.

학습보조수단으로 공학적 도구를 활용한다는 것은 공학적 도구를 학습자의 흥미를 향상시키고, 동기를 유발하고, 학습을 촉진시키는데 사용하는 것이다. 예를 들어 다양한 애니메이션 기능은 학생들의 흥미를 끄는데 사용할 수 있으며, 계산기는 수학 학습에서 학습 주제와 관련성이 떨어지는 복잡한 계산 및 그래프 그리기 등을 쉽게 해주어 학생들이 본 학습에 더 집중할 수 있도록 도와줄 수 있다. 인터넷의 경우, 학생들이 자신의 생각과 풀이를 공유하고 토론하는 의사소통의 도구로서 사용할 수 있다.

이해함양수단으로 공학적 도구를 활용한다는 것은 공학적 도구를 이용하여 추상적인 수학적 개념과 원리를 시각적으로 구체화시켜 학생들의 이해를 돕는 데 사용하는 것이다. 예를 들어, GSP나 Poly 등을 활용하여 복잡한 평면도형과 입체도형을 시각화하여 학생들의 이해를 돕거나, 그래프 기능을 가진 프로그램을 이용하여 대수와 기하 사이의 연결성을 강화시키는데 사용할 수 있다.

탐구수단으로 공학적 도구를 활용한다는 것은 공학적 도구를 사용하여 시뮬레이션, 실험을 실시하고 수학적 원리를 발견, 재구성하는데 사용하는 것이다. 예를 들어, GSP나 Cabri3D를 사용하여 도형을 움직여가며 불변의 성질이나 문제해결의 아이디어를 발견하거나, 스프레드시트를 활용하여 확률, 통계 영역에서 자료 탐색 활동과 실험 활동을 하는 것이다.

3) 공학적 도구는 수학 교육에서 필수

NCTM(2000)은 기술공학의 원리를 내세워 기술공학의 중요성을 역설하고 있다. 기술공학은 수학을 가르치고 배우는 데 필수이다. 그것은 수학을 가르치는데 영향을 미치고 학생들의 학습을 향상시킨다.

전자 공학 – 계산기와 컴퓨터 – 은 수학을 가르치고, 배우고 실행하는 데 필수 도구이다. 수학적 사고를 시각적으로 표현할 수 있게 해주며 자료를 정리하고 분석하는 일을 쉽게 해준다. 또한 효율적이고 정확한 계산을 가능하게 한다. 기술공학은 기하, 통계, 대수, 측정, 산술 등 수학의 모든 분야에서 학생들의 탐구과정을 지원할 수 있다. 기술공학 도구를 이용할 수 있을 때 학생들의 탐구과정을 지원할 수 있다. 기술공학 도구를 이용할 수 있을 때 학생들은 의사 결정, 반성, 추론, 문제 해결에 초점을 둘 수 있다.

학생들은 기술공학을 적절히 사용함으로써 더 많은 수학을 보다 심도 있게 학습할 수 있다. 기술공학을 기본적인 이해와 직관에 대한 대체물로 사용해서는 안 된다. 오히려 기술공학은 그러한 이해와 직관을 기르는 데 사용되어야 한다. 수학 교육 프로그램에서 기술공학은 학생들의 수학 학습을 풍요롭게 하는 목표를 달성하기 위해 널리 확실하게 사용되어야 한다.

기술공학의 존재성, 다용성, 그리고 그것이 가지고 있는 힘은 학생들이 어떤 수학을 학습해야 하는 것뿐 아니라 어떻게 수학을 배워야 하는지를 재검토하는 것을 가능하게 하고 또 필

요하게 만든다. 수학교실의 모든 학생들은 능숙한 교사의 안내를 받으며 자신의 수학 학습을 도와주는 기술공학을 이용할 수 있다.

나. 우리나라와 외국의 공학적 도구의 사용 현황

1) 교육과정과 교과서에 나타난 공학적 도구의 사용

가) 우리나라 교육과정

〈표 Ⅳ-7〉 2007, 2009 개정 교육과정의 공학 도구 관련 부분 발췌

2007 개정 교육과정	2009 개정 교육과정
4. 교수 · 학습 방법 카. 수학 교수 · 학습 과정에서 교육기자재의 활용은 다음 사항에 유의한다. (1) 교수 · 학습의 전 과정을 통하여 적절하고 다양한 교육 기자재를 활용하여 수학 학습의 효과를 높이도록 한다. (2) 계산 능력 배양을 목표로 하지 않는 경우의 복잡한 계산 수행, 수학적 개념 · 원리 · 법칙의 이해, 문제해결력 향상 등을 위하여 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구와 다양한 교구를 확보하여 활용할 수 있다. 5. 평 가 사. 수학 학습의 평가에서는 평가하는 학습 내용에 따라 학생에게 계산기, 컴퓨터와 같은 공학적 도구와 다양한 교구를 이용할 수 있는 기회를 제공할 수 있다.	[초등학교 3~4학년군] ㈎ 수와 연산 〈교수 · 학습상의 유의점〉 ⑥ 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈을 하기 전에 계산 결과를 어림해 보고, 어림한 값을 계산기를 사용하여 확인할 수 있게 한다. ㈑ 규칙성 〈교수 · 학습상의 유의점〉 ① 규칙적인 계산식의 배열에서 계산 결과의 규칙을 찾는 활동을 할 때 계산기를 활용할 수 있게 한다. [초등학교 5~6학년군] ㈎ 수와 연산 〈교수 · 학습상의 유의점〉 ⑤ 소수의 곱셈과 나눗셈에서 복잡한 계산은 계산기를 사용하게 한다. ㈐ 측정 〈교수 · 학습상의 유의점〉 ④ 측정에 관련된 활동이나 원의 넓이, 겉넓이, 부피 등을 구할 때 복잡한 계산은 계산기를 사용하게 한다. [중학교 1~3학년군] ㈑ 확률과 통계 〈교수 · 학습상의 유의점〉 ⑩ 공학적 도구를 활용하여, 표와 그래프를 그리고 대푯값과 산포도를 구할 수 있게 한다. ㈒ 기하 〈교수 · 학습상의 유의점〉 ⑪ 공학적 도구나 다양한 교구를 활용하여 도형의 성질을 추론할 수 있게 한다. 5. 교수 · 학습 방법 파. 수학 교수 · 학습 과정에서 교육기자재 및 수학 교과 교실의 활용은 다음 사항에 유의한다.

	(1) 교수 · 학습의 전 과정을 통하여 적절하고 다양한 교육 기자재를 활용하여 수학 학습의효과를 높이도록 한다. (2) 계산 능력 배양을 목표로 하지 않는 경우의 복잡한 계산 수행, 수학의 개념, 원리, 법칙의 이해, 문제 해결력 향상 등을 위하여 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구와 다양한 교구를 활용한다 6. 평가; 사. 수학 학습의 평가에서는 평가하는 학습 내용과 방법에 따라 학생에게 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구와 다양한 교구를 이용할 수 있는 기회를 제공한다.

나) 외국의 교육과정과 평가

NCTM(1989)은 “새로운 기술공학은 수학의 활용 및 응용범위를 크게 변화시켰기 때문에, 학생들은 문제를 탐구하고 해결하는 도구로서 계산기와 컴퓨터를 적절하게 사용할 필요성이 요구되었다”고 하며 이 규준의 출간배경에 기술공학의 급속한 발전을 포함하였다. 영국의 경우에는 5세부터 19세까지의 수학교육과 관련하여 CAS(Computer Algebra System) 활용 지침서(Oldkknow, & Flower, 1996)를 출간하였으며, 1999년 수학교육과정의 학습프로그램에 CAS의 적절한 활용을 포함하고 있다. 호주에서는 대학수학능력시험에서 수학과목 문제에 끼치는 그래핑 계산기의 영향을 고찰하여(Kissane, Bradley, & Kemp, 1994), 그래핑 계산기의 적극적인 활용을 가능하게 하는 중립적인 문제를 출제하도록 제시하였다(Kemp, Kissane, &Bradley, 1996). 이에 따라 1997년부터 호주의 Victoria 주, 그리고 1998년부터 호주의 Western Australia 주에서 대학수학능력시험에 그래핑 계산기의 사용이 허용되었다. 뉴질랜드의 경우를 보면, 수학교육과정(Ministry of Education, 1992)에서 계산기와 컴퓨터의 활용에 대해 강조하였다. 또한 모든 수준의 수학 학습에 있어서 그래핑 계산기와 그래핑 팩키지, 스프레드시트 등과 같은 컴퓨터 관련 소프트웨어를 활용함으로써, 학생들로 하여금 틀에 박힌 기계적 조작보다는 수학적 사고에 중점을 두도록 하였으며, 특별한 학습 상황에 있어서 이를 응용할 수 있도록 하는 중요한 도구라며 활발하게 사용하고 있음을 알 수 있다(홍예윤, 고상숙, 2012).

이와 같이 많은 나라에서 그래핑 계산기와 같은 CAS(Computer Algebra System) 기능을 갖춘 공학적 도구와 관련한 활발한 연구가 이루어져 왔으며, 이미 미국, 영국, 싱가포르, 호주, 뉴질랜드 등의 여러 나라에서는 그래핑 계산기를 수학과 교수학습에 활용하고 있을 뿐만 아니라 대학수학능력시험과 같은 국가 공통 평가시험에도 계산기의 사용을 허용하

고 있다.[11]

수학 · 과학 성취도 추이변화 국제비교 연구(TIMSS)[12]에서는 그 동안 충분한 논의를 거친 후 2003의 8학년 평가에 계산기 사용이 도입되었다. 새로 개발된 문항들에 한해, 계산기 없이 풀이가 가능하지만 계산기 사용을 원하는 국가에 대해서는 계산기 사용을 허용했다. TIMSS 2003의 경험을 토대로 TIMSS 2007에서 계산기 사용이 허용되었으며, 이는 TIMSS 2011에도 여전히 적용되고 있다. 그러나 4학년에 대해서는 계산기 사용이 허용되지 않는다.

다) 수학 교과서 비교

(1) 우리나라 – 2009 개정 교육과정

계산기에 대한 우리나라 수학계의 논란은 지난 2011년의 언론 보도에서도 그랬고, 지난 3월 제2차 수학교육 종합계획 발표 당시에도 계속되었지만 우리 교과서에는 이미 계산기나 공학 도구의 사용이 공식적으로 들어가 있다.

[그림 Ⅳ-13] 2009 개정 초등 4-1학기 교과서 계산기 사용 예(173쪽)

2 규칙을 이용하여 계산하시오. 준비물 계산기

- 보기 를 보고 다음 계산 결과를 예상해 보시오.

보기
$123456789 \times 9 = 1111111101$

123456789×18

123456789×27

123456789×36

- 계산기를 사용하여 확인해 보고 어떤 규칙이 있는지 설명해 보시오.

- 규칙을 이용하여 다음 계산 결과를 예상해 보고 계산기를 사용하여 결과를 확인해 보시오.

123456789×45

123456789×54

---

11) 싱가포르의 국가시험의 수학시험에서 계산기 허용 여부를 살펴보면, 초등 졸업시험에서는 부분적으로, 중등 졸업시험에서는 전체적으로 계산기를 허용하고 있다. 독일의 아비투어 필기시험 시 허용된 시험보조물로 보통 휴대용 전자계산기를 사용할 수 있는데, 학교의 신청여하에 따라 CAS를 사용할 수도 있다. 핀란드에서는 대학입학자격시험 위원회에서 참조하도록 승인한 계산기와 책자를 활용할 수 있다. 호주는 7, 9학년의 전국학력평가와 고등학교 졸업 자격시험(HSC)에서 계산기가 허용된다(류희찬 외, 2011).

12) 수학 · 과학 성취도 추이변화 국제비교 연구(Trends in International Mathematics and Science Study, TIMSS)는 세계 각국의 4학년과 8학년을 대상으로 하는 연구이다. 1995년에 국제 학업성취도 평가 협회(IEA)에서 고안하여 4년마다 한 번씩 이루어지고 있다.

초등학교 교과서에서는 4학년 1학기 ‘규칙성 찾기’에서 규칙을 이용하여 계산 결과를 예상해 보고 계산기를 사용하여 결과를 확인해 보도록 하고 있다. 또한 6학년 1학기 교과서에서는 ‘원의 넓이’ 단원에서 측정을 통해 원주율을 구할 때 계산기를 사용하도록 하고 있다.

중학교 교과서(미래엔, 이강섭 외)를 보면 중 1과정에서는 프로젝트 형태로 계산기나 컴퓨터가 활용되고 있으며, ‘통계’ 단원의 본문에서도 계산기를 이용하도록 안내되고 있다.

[그림 Ⅳ-14] 중1 교과서 통계 단원 문제(미래엔, 이강섭 외)

문제 3 다음 표는 재성이네 중학교 학생 250명의 하루 독서 시간을 조사하여 만든 것이다. 표를 완성하고, 재성이네 중학교 학생들의 하루 독서 시간의 평균을 구하여라.

독서 시간(분)	계급값(분)	도수(명)	(계급값)×(도수)
20이상 ~ 30미만		10	
30 ~ 40		26	
40 ~ 50		45	
50 ~ 60		96	
60 ~ 70		37	
70 ~ 80		24	
80 ~ 90		12	
합계		250	

또한 중 3의 ‘통계’ 단원에서는 평균, 분산, 표준편차를 구할 때 계산기를 사용하도록 안내하고 있으며 컴퓨터 프로그램을 이용하는 프로젝트도 있다. 또한 ‘삼각비’ 단원에서도 삼각비의 표나 계산기를 이용하여 삼각비의 값을 구하거나 삼각비를 활용하도록 하고 있다.

고등학교 교과서에서는 컴퓨터 프로그램이나 스마트폰 애플리케이션 등을 이용하여 학습 내용을 탐구하는 ‘수학 실험실(두산동아, 교학사)’이나 ‘공학적 도구의 활용(신사고 미적분 Ⅱ)’이라는 별단을 교과서의 단원 뒷부분에 배치하였으며, 교과서 본문에서는 실생활 문제처럼 계산이 복잡한 문제에서 계산기를 이용하도록 계산기 아이콘(지학사, 비상교육)을 표시하고 있다. 특히 대부분의 「확률과 통계」 교과서에서 계산기나 컴퓨터 프로그램이 많이 나타나고 있다.

[그림 Ⅳ-15] 수Ⅰ 교과서 속의 공학 도구 사용(교학사, 김창동 외)

수학 실험실

스프레드시트 프로그램을 이용한 조립제법

삼차식 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$를 일차식 $x-a$로 나눌 때의 몫과 나머지를 컴퓨터 프로그램을 이용하여 구하여 보자.

예를 들어 삼차식 $2x^3-4x^2+5$를 일차식 $x-3$으로 나눌 때의 몫과 나머지를 다음과 같이 구할 수 있다.

❶ 셀 B2에 '3'을 입력한다.
❷ 셀 C2, D2, E2, F2에 삼차식의 각 항의 계수인 '2', '−4', '0', '5'를 차례로 입력한다.
❸ 셀 C4에 '=C2'를 입력한다.
❹ 셀 D3에 '=$B2*C4'를 입력한다.
❺ 셀 D4에 '=D2+D3'을 입력한다.
❻ 셀 D3을 복사하여 셀 E3, F3에 각각 붙여넣기를 한다.
❼ 셀 D4를 복사하여 셀 E4, F4에 각각 붙여넣기를 한다.

이렇게 입력하면 셀 C4, D4, E4의 값 2, 2, 6은 차례로 몫의 각 항의 계수이고, 셀 F4의 값 23은 나머지이다. 즉, 몫은 $2x^2+2x+6$, 나머지는 23이다.

다른 삼차식을 일차식 $x-a$로 나눌 때, 셀 B2에 a를, 셀 C2, D2, E2, F2에 삼차식의 각 항의 계수를 차례로 입력하면 몫과 나머지를 구할 수 있다.

과제 1 사차식 $f(x)$를 일차식 $x-a$로 나눌 때의 몫과 나머지를 구하는 스프레드시트 프로그램을 만들고 사차식 $2x^4-3x^2+5x-4$를 일차식 $x+2$로 나눌 때의 몫과 나머지를 구하여라.

2. 나머지정리 35

(2) 싱가포르

초등학교 교과서에서는 5학년에 처음 계산기를 사용하는데 'Use of Calculator'라는 소단원이 한 학기에 한 번씩 배치되어 있으며 1학기에는'계산기를 사용하여 자연수끼리의 사칙연산

계산하기', 2학기에는 '계산기를 사용하여 소수의 사칙연산하기'를 다룬다. 그리고 6학년에는 단원으로 구분하지 않고 문제에 따라 계산기를 사용하거나 사용하지 않도록 한다.

[그림 Ⅳ-16] 싱가포르 중학교 교과서 계산기 사용 예

Using Calculator to Find Mean

We can also use the statistical functions of a calculator to find the mean of a set of data directly.

Now, let us find the mean of the following set of numbers using a calculator.

10 , 15 , 15 , 20 , 20 , 20 , 26 , 30

Step 1 Press the key MODE and select 1 for statistics.

Step 2 Press 0 for single variable statistics.

Attention

The example shown here is valid only for calculators of certain models. For calculators of other models, you may need to refer to the user's manual.

중학교 교과서에서는 계산기나 프로그램을 좀 더 적극적으로 사용하고 있으며 사용법을 설명하는 경우도 있다. 예를 들어 계산기에 통계 자료를 입력하여 평균, 표준편차를 구하는 단원에서는 보기문항을 통해서 그 과정을 자세히 설명하고 있다. 또한 Graphmatica라는 프로그램을 이용하여 그래프의 개형을 그리거나 함숫값을 구하고 있다.

고등학교에서는 A-Level 시험을 준비하는 과정으로 「CORE MATHS for ADVANCED LEVEL」와 같은 책을 사용하고 있으며, A-Level 시험 상황에서와 같이 계산기를 적절히 사용하도록 하고 있다.

(3) 미국 - 뉴욕 주

미국은 교육과정(Common Core State Standards for Mathematics)에서는 전략적으로 적절한 도구를 사용하도록 하고 있다. 그리고 초등학교 과정부터 학교 교실에서 자유롭게 계산기를 사용하고 있다. 그렇기 때문에 교과서에 문항별로 계산기와 관련된 특별한 언급이 없으며 공학적 도구들을 꼭 써야하는 문항에는 도구 아이콘을 주고 있다.

[그림 Ⅳ-17] 미국 뉴욕 주 중학교 교과서 공학 도구 사용 예

Technology LAB Create a Scatter Plot

Use with Scatter Plots

MATHEMATICAL PRACTICES Use appropriate tools strategically.

Learn It Online
Lab Resources Online

You can use a graphing calculator to make a scatter plot.

CC.8.SP.2: ... For scatter plots that suggest a linear association, informally fit a straight line, and informally assess the model fit by judging the closeness of the data points to the line. *Also CC.8.SP.1*

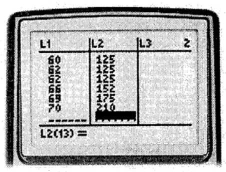
Activity 1

The table shows heights and weights of students in Mr. Devany's class. Use a graphing calculator to create a scatter plot of the data.

Height (in.)	Weight (lb)
41	92
43	111
46	105
50	120
51	110
55	107
60	125
62	125
62	125
66	152
69	175
70	210

To enter the data, press STAT and select **1:Edit.**

In L1, enter the heights. In L2, enter the weights.

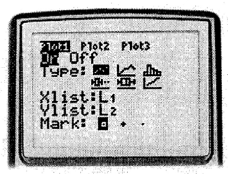


To see a scatter plot of the data,

press 2nd Y= (STAT PLOT) ENTER to select "STAT PLOTS 1:"

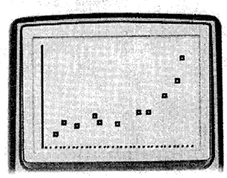
Scroll and press ENTER to select "On" and the scatter plot icon. Scroll to "Xlist=" and

press 2nd 1 (L1) to select List 1.



Scroll to "Ylist=" and press 2nd 2 (L2) to select List 2. Finally, scroll to "Mark:" and choose the box.

To view the scatter plot, press ZOOM and select **9: Zoom Stat.** Press TRACE and the arrow keys to read the coordinates of the data points.



Think and Discuss

1. Describe the correlation shown in the scatter plot.
2. Suppose you added a third category: boy or girl. How could the height, weight, and gender data be displayed?

Try This

Use a graphing calculator to create a scatter plot of the data.

1.

x	52	36	13	41	39	52	18	50	44	30	51
y	10	15	27	15	12	9	27	10	11	21	4

394 *Chapter 9 Data, Prediction, and Linear Functions*

어떤 교과서는 계산기를 사용하는 방법을 "Technology Lab"이라는 별단으로 만들어 각 단원별로 배치한 경우도 있다.

미국은 90년대 초에 계산기 도입을 좀 더 적극적으로 수용하기 위하여 교과 내용을 부분적으로 개정하였다. 예컨대 두 자리 나눗셈은 4학년에서 5학년으로 옮기고, 지필을 이용한 세

자리 나눗셈을 삭제하였다. 유치원 과정부터 모든 학년에서 계산기 활용을 허용하고 있으며, 수학 교과 내용 중 수와 연산 원리 · 법칙 및 문제를 해결할 수 있도록 구성하였다. 그리고 계산과 관련된 문제 해결 장면에서는 암산과 지필, 계산기를 선택적으로 사용하도록 구성하였고, 교과서 단원 사이에 계산기를 활용하여 학습할 수 있는 특별한 주제를 삽입하고 있다.(류성림, 2010, p.4)

(4) 일본

일본의 '학습지도요령'은 국가에서 고시하는 단일한 교육과정 문서로 우리나라의 교육과정 문서에 해당한다. 일본은 2008년 2월에 발표한 '중학교학습지도요령'에서 '자료의 활용'단원에서 '컴퓨터를 이용한다든지 하여 모집단으로부터 표본을 추출하고 표본의 경향을 조사하는 것으로 모집단의 경향을 파악하는 것을 이해할 수 있도록 한다.'고 명시하였으며 교과서에서는 임의추출을 엑셀 프로그램을 이용하도록 하고 있다.

(5) 영국

영국 정부가 초등학생의 계산 능력 향상을 위해 전자계산기 사용 규제에 나섰다. 영국 교육부는 2014년부터 초등학교 마지막 해에 치르는 학력평가 수학과목 시험에 수험생의 전자계산기 사용을 금지한다고 9일 발표했다. 이는 영국 초등학생의 전자계산기 활용이 과도해 간단한 계산조차 못 하는 학생이 증가하고, 중등학교 진학 이후 수학 실력 향상을 저해한다는 지적에 따른 개선책이다. 교육부는 이와 함께 초등학생의 기본적인 연산 능력이 일정 수준에 오를 때까지 수업시간에 전자계산기를 사용을 규제하는 방안을 권고하기로 했다. 현재 영국에서는 7살 이상의 초등학생은 수학 교과 수업과 시험 시간에 전자계산기를 사용할 수 있다. 영국 교육부에 따르면 잉글랜드 지역 초등학교 5학년 학생의 전자계산기 사용률은 98%로 국제 평균인 46%보다 월등히 높다. 엘리자베스 트러스 교육부 부장관은 "학생들이 기본 연산 능력을 충분히 갖춘 다음 전자계산기를 사용하도록 하자는 것이 이번 개편의 취지"라고 밝혔다.(경향신문, 2012.11.10.)

위의 글은 인터넷에서 많은 사람들이 계산기 사용을 금해야 하는 근거로 많이 드는 기사이다. 그러나 영국은 교육과정에서 "계산기는 제대로 된 쓰기와 암산의 대체물로 사용되어서는 안 된다. 그러므로 계산기는 쓰기와 암산 능력이 안정적일 때 학생들의 개념적인 이해와 보다 복잡한 수에 관한 문제를 탐구하는 것을 지원하기 위해 KS2[13]의 마지막 부분에서부터

13) 영국의 교육과정은 4개의 학년군제로 나눠져 있다. KS1(Key Stage 1)은 우리나라 초등학교 1~2학년, KS2는 우리나라 초등학교 3~6학년에 해당한다. 그리고 KS3와 KS4는 각각 우리나라 중학교와 고등학교 1~2학년에 해당한다.

소개되어야 한다. 초등학교와 중학교에서 교사들은 ICT 도구가 필요한 시기에 관해서 판단해야 한다."라고 명시하였다.

또한 영국의 중학교에서는 그래픽 계산기를 사용하고 있으며, 이로 인해 여러 가지 그래프를 그리는 학습이 자주 전개된다. 다만 계산할 수 있는 학습이 안 되어 있으므로 중학교에서 이차함수의 그래프의 절편이나 해를 구하는 것은 학습하지 않으며, KS4에 가서 인수분해를 배운 후에 절편이나 해를 구하는 학습을 전개한다.

(6) 핀란드

교과서 뒷부분에 컴퓨터를 이용하여 그래프를 그리거나 데이터를 처리하는 방법, 계산기를 사용하는 방법을 제시하고 있다. 본문에도 계산기를 이용하여 해결하는 문제들이 많이 있기 때문에 학생들이 이 내용을 참고할 수 있다. 실제적인 자료를 이용한 문제를 제시하고 계산이 복잡한 문제는 계산기를 이용하여 해결할 수 있도록 문제 밑에 계산기 모양을 그려 넣었다.(류희찬외, 2011, 126-127)

핀란드는 계산기를 적극적으로 사용하며 모든 문제의 실제의 값을 구한다. 계산 결과가 27π㎠인 경우는 84.82㎠로, $5\sqrt{2}$m인 경우는 7.07m라고 표현한다. 또한 피타고라스의 정리는 삼각비 이후에 지도하며, 각의 크기가 주어지지 않는 직각삼각형의 삼각비를 구하는 문제는 풀 수 없으니 다루지 않으며, 그리고 특수각도 다루지 않는다. 그러므로 $\sin 45^\circ$의 값을 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 로 나타낼 필요가 없으며 계산기를 이용하여 0.70…의 값을 이용한다.

2) 제2차 수학교육 종합 계획 속의 공학적 도구의 사용

교육부는 학생 개개인의 꿈과 끼를 살릴 수 있는 행복한 교육을 실현하고 창의적 인재를 양성하며 배움을 즐기는 수학교육 추진을 위해 3월 16일(월) 제2차 수학교육 종합 계획을 발표하였다.

교육부는 보도 자료에서 다음과 같이 말하였다.

『제1차 수학교육 선진화 방안('12.1)은 학교 수학교육의 내실화 및 수학 대중화에 기여하였다. 그럼에도 불구하고 입시 위주의 학업 부담으로 학생들의 과목 흥미도 및 자신감이 저조하여, 이를 중점적으로 개선할 필요성이 제기되고 있다. 이에 제2차 수학교육 종합계획에서는 수요자 참여 중심의 수학교육을 실현하고 범국가적 수학교육 지원 체제를 구축하는 패러다임의 전환을 비전으로 하여 "배움을 즐기는 수학교육"이 달성될 수 있도록 하고 있다.』

또한 교육부는 아래와 같은 추진 과제를 발표하였다.

1. 배움을 즐기는 수학교육을 위하여 수학의 학습량과 난이도를 적정화한다. (중략)
2. 결과 중심의 평가보다 과정 중심의 평가를 더욱 강화함으로써 궁극적으로 학생 참여 중

심의 수업이 이루어질 수 있도록 한다.
– 체험과 탐구 중심으로 수학 수업이 이루어지도록 하기 위하여, 수학교사들을 대상으로 연수를 강화하고, 수업 시간에 활용 가능한 콘텐츠를 개발․보급한다.
– 또한, 불필요한 계산에서 벗어나 수학적 개념과 원리 학습에 충실할 수 있도록 계산기, 소프트웨어(SW) 등 공학적 도구의 활용을 적극 추진한다. ※ 선진형 수학교실('12~'14) 활용 사례 확대 · 보급
– 서술 · 논술형 평가, 관찰평가, 자기평가 등 대안평가 방안을 연구하고, 현장에서의 활용성을 검증하여 보급해 나갈 예정이다.
– 스토리텔링, 글쓰기, 프로젝트 학습, 협력적 문제해결 학습 등 수학수업 유형별로 평가를 실시하여 수업과 평가의 일관성을 유지한다.
(중략)
그리고 교육부는 "공학적 도구 활용 지원"과 관련하여 다음과 같은 추진 과제를 발표하였다.
『수학 교과별, 교과내용별, 수학수업과 동아리 활동 등 체험 · 탐구 중심 수학수업을 위한 교구, SW 및 첨단 IT 활용 지원 ※ 선진형 수학교실('12~'14) 활용 사례 확대 · 보급
– 수학수업에 도입 가능한 첨단 IT 및 SW의 개발 보급을 위해 정부의 다양한 재원 확보 노력, 기업 교육기부 활용 등 외부 인프라 활용
– 공학적 도구 활용 지원을 위한 관련 정보, 사용 방법 등 안내 제공』

다. 미래를 위한 제언

초등학교 수준에서는 기초적인 계산 능력을 기르는 것이 중요하지만, 초등학교 고학년이나 중학교부터는 단계적으로 계산기 사용을 허용하는 것이 바람직하다는 데 대체로 공감한다. 또한 교과부에서는 제2차 수학교육 종합 계획에서 공학적 도구 활용을 지원하겠다는 추진 과제를 설정하였다. 한편 수학 교과서에서는 이미 7차 교육과정에서부터 계산기를 비롯한 여러 공학적 도구를 사용하도록 안내하고 있다. 그러나 실제 교실에서는 제대로 공학적 도구를 이용하지 않고 있다. 계산기가 준비되어있지 않거나 평가에서 계산기 등의 공학적 도구가 이용되지 않으므로 공학적 도구를 이용하는 문항을 다룰 필요성을 느끼지 못한다. 그러므로 계산기 등의 공학적 도구가 갖추어진 교실환경이 마련되어야 하고, 공학적 도구를 사용할 수 있도록 수업을 잘 안내하는 교과서가 제작되어야 하며, 또한 수업뿐만 아니라 평가에서도 공학적 도구를 이용해야만 비로소 수학수업에서 계산기 등의 공학적 도구가 정착할 수 있다.
– 수업이나 평가에 필요한 계산기 등의 공학적 도구가 준비되어야 한다.

− 초등학교 고학년부터 수학교과 수업시간에 계산기를 적극 이용해야 한다. 특히, 통계와 관련된 수업은 계산기나 그래픽계산기 등의 공학적 도구를 적극 사용해야한다.
− 평가에 계산기가 이용되어야한다. 우선 학교 수행 평가나 내신 평가에서 이용하도록 하고 장기적으로는 수능에서도 이용하는 방법을 고민할 필요가 있다. 이러한 주장은 새로운 주장이 아니며 이미 2009 개정 교육과정은 수학의 모든 과목의 평가에서 “수학 학습의 평가에서는 평가하는 학습 내용과 방법에 따라 학생에게 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구와 다양한 교구를 이용할 수 있는 기회를 제공한다.”고 명시하였다. 이를 실천하기 위한 노력이 필요할 뿐이다.
− 계산기뿐만 아니라 다양한 공학적 도구가 수업과 평가에서 활용되어야 한다.

Ⅴ. 학교 수학과 평가 개선 방안

1. 수학과 평가 개선의 필요성

우리나라에서 '평가'라는 단어는 어떤 일을 수행할 때 평가 대상자(수행자)에 대한 정보를 제공하여 수행의 목적에 효과적으로 다다를 수 있도록 정보를 제공하는 의미보다는 수요와 공급의 불균형으로 야기되는 문제를 해결하기 위해 제한적인 자원을 수요자에게 배분하는 수단으로 인식하는 경향이 많다. 가령 기업체나 기관에서 구성원을 평가한다고 하면 제한된 성과급을 차등하여 분배하기 위한 근거 또는 수단으로 생각하는 것과 같다. 이러한 평가는 평가가 가지는 많은 의미와 역할들 중 일부분에 지나지 않는다. 하지만, 아쉽게도 학교 현장에서의 평가 또한 꽤 오랜 시간동안 특목고입시, 대학입시에서 중요한 전형자료로 사용되기 때문에 상급학교를 가기위한 수단으로 생각하는 사람들이 많다. 학교 현장에서 평가가 관련된 민원은 매우 민감한 부분이고, 가장 민원이 많은 날이 정기고사 기간이다 보니 모든 평가가 마무리 되어 방학이 시작될 때까지 교사들은 긴장 속에서 업무를 진행한다. 현재 학교에서 진행되고 있는 평가 방식에 대해 교사, 학부모, 학생 모두 문제의식을 느끼고 있지만 평가방식의 변화에 대해 용기 있게 의견을 개진하기란 쉽지 않다. 특히, 수학과의 평가는 기존의 평가 방식의 문제점에 대해 학생, 교사, 학부모 모두 각자의 입장에서 할 말들이 많은 분야이다. 민감한 부분이지만 현장 수학교사로서 그 문제의식과 평가방식의 변화의 방향에 대해 의견을 내놓고자 한다.

평가란 특정평가대상에 대해 교육적 결정을 내리기 위하여 정보를 수집하고 사용하는 과정으로 '학습을 진단하는 기능', '학습 진도 상황을 점검하는 기능', '학습을 촉진하는 기능' , '학업성취도를 결정하는 기능', '생활지도에 필요한 자료를 제공하는 기능', '학습지도 개선에 필요한 자료를 제공하는 기능' 그리고 '시행하는 프로그램을 점검하는 기능'을 수행하는 것이다.[14)] 위에 제시된 평가가 수행하는 기능을 학교 현장에서 제대로 하고 있는가? 고등학교의 경우 평가를 계획할 때 위에 제시된 평가의 기능을 고민하는 경우는 매우 드물다. 교사가 가장 먼저 고려해야할 평가의 목적이'평균은 어느 정도 선에서 나오도록 난이도를 조절할까?', '1등급대의 학생들이 4% 내외로 나오도록 하려면 문항을 어떻게 출제해야 할까?', '표준점수(Z점수)에서 불이익을 받지 않도록 문항구성을 하려면 어떻게 해야 할까?'를 더 고민한다. 어쩌면 가장

14) 고상숙 외 수학교육 평가론 (2012) 서울: 경문사

실제적인 평가의 목적은 ‘어떻게 하면 민원을 최소화 하도록 평가를 할까?’ 일지도 모른다. NCTM(1995)에서 제시한 평가의 목적으로 다음 네 가지를 제시하고 있다 ‘각각의 학생은 학습 목표를 향해 어떻게 진전해 가는가?’, ‘교수학적 결정을 내리기 위해서 학생들의 진전에 대한 증거를 어떻게 사용할 수 있을까?’ , ‘ 각 학생들의 이해정도는 학생들이 도달해야 할 성취 목표와 비교했을 때 어떠한가?’, ‘학생들에 대한 기대 및 목표에 관련해서 수학 프로그램이 잘 운영되고 있는가?’ 이 네 가지 목적에 다다르려면 평가는 수업을 진행하면서 함께 이루어져야 함을 알 수 있다. ‘학교수학을 위한 원리와 규준’(2000)에서는 수학교사의 역할과 책임을 언급하며 다음과 같은 역할을 요구하고 있다.

‘평가를 교수법과 통합하고 각 학생의 학습 정도를 평가하기 위하여 다양한 증거 자료를 활용하는 것은 도전적인 일이다. 이는 특히 누구나 치러야하는 중요한 시험에 직면해서 어려울 수 있다. 때때로 교사는 학생들의 수학 학습을 위한 자신의 목표와 시험에서 요구하는 목표 사이에 끼어있다는 생각이 들 수는 있겠으나, 교사가 무력한 것은 아니다. 만일 요구되는 시험이 의미 있는 교수 목표와 일관되지 않는다고 판단되면, 교사는 이를 교사 교육자와 행정가에게 말해야 하고 시험에 대한 결정을 내리는 제 참여하는 방법을 찾아야 한다.’

이제 평가를 수행하는 교사로서 평가 본연의 목적으로 되돌아 가야한다는 문제제기를 하는 것은 당연한 것이다.

2. 현행 학교에서의 수학과 평가의 문제점과 원인

가. 지필평가 중심의 수학과 평가의 문제점

현재 학교 생활기록부에서 학생들의 수학 학습 능력을 표현하는 방법은 원점수와 그 과목 평균, 표준편차 그리고 등급이다. 여기에 교과 세부능력 특기 사항에 학생의 교과관련 특이사항을 글로 적을 수 모든 학생에게 의무적으로 기록하지는 않는다.[15] 따라서, 수치로 표현된 원점수와 등급이 한 학생의 수학 능력을 확인할 수 있는 유일한 정보이다.

교사를 비롯한 많은 수학교육 전문가들은 생기부에 나타난 수치가 학생의 수학적 역량을 나타내는 중요한 지표로 삼기에는 문제가 있다고 지적한다. 하지만 현실은 그렇지 않다. 그러

15) 교과 세부 능력 특기 사항은 대체로 상위권 성적을 얻은 학생을 대상으로 교과 교사가 학생의 교과관련 특성을 적어 주는 경우가 대부분이다. 그리고 학급 당 인원이 아직 많은 실정에서 교과 교사가 수업 시간에 학생 개개인이 특성을 모두 파악해서 기록하는 것도 쉬운 일은 아니다

다 보니 자연스럽게 결과 중심적 사고가 학교 현장에서 설득력을 얻게 되고, 결국 더욱 중요한 수학적 과정을 평가하는 것이 의미가 축소되고 이러한 현상은 학년이 올라갈수록 심화된다.

그렇다면 과연 수치로 표현되는 인지적 능력 평가 중심의 지표는 어떤 문제점을 갖고 있을까? 몇 년 전 미국 부시대통령 시절에 시행되었던 연방 교육법인 NCLB (No Child Left Behind)의 실패 원인으로 많이 지적된 점이 표준화된 학력 평가 결과를 지방 재정 지원 차별화의 근거로 삼아 줄 세우기를 했다는 것이다. 즉 교육의 성과를 평가할 때 여러 가지 지표를 종합적으로 사용해야 함에도 불구하고 토론수업, 프로젝트 수업, 논술, 예체능 활동 등 다양한 교육활동들을 평가하지 않고, 한 가지 표준화 시험으로, 그것도 딱 한번 본 결과를 가지고 교육성과에 대해 교사들와 학교에게 책임을 묻는 것은 타당성이 낮다. 이는 매우 불공정하고 부정확했으며, 다수 교사들의 불만을 사고 수많은 학교들은 조직적으로 부정을 저지르게 하는 결과를 낳고 말았다.

이찬승은 표준화된 시험 폐해를 다음과 같이 정리했다.

- 교육의 내용을 측정할 수 있는 범위로 좁힌다.
- 전인적 성장을 위한 교육 대신에 시험 문제 풀이 중심의 수업을 하게 만든다.
- 좋든 싫든 누구나 표준화된 시험에 참여하게 만든다.
- 경쟁을 강화한다.
- 학교와 학생을 비교하고 서열화한다.[16)]

실제로 수학교과는 표준화된 시험 체제에서 대학진학에 있어서 성능 좋은 거름종이 역할을 해왔고, 이는 역설적으로 학생들에게 수학교과가 중요시되는 이유가 되었다. 우선 교사와 학부모가 이러한 문제점을 직시하고 다양하면서도 학생에게 실질적 도움을 주는 평가를 위한 노력을 하는 것이 중요하겠지만 이러한 시도를 하는 교사들에 대한 제도적 지원 또한 절실하다.

16) 이찬승(교육을 바꾸는 사람들 대표) 교육 30년지대계(5) – 미국 공교육에서 배울 점 2가지!

나. 학교 현장에서 다양한 평가를 어렵게 하는 원인

현재 시행되고 있는 2009 개정교육과정에 제시된 중등학교 수학과 평가에 대한 내용은 다음 〈표 Ⅴ-1〉과 같다.

〈표 Ⅴ-1〉 2009 개정 수학과 교육과정의 평가 규정

6. 평가 가. 수학 학습의 평가는 학생의 인지적 영역과 정의적 영역에 대한 유용한 정보를 제공하고, 학생 개개인의 수학 학습과 전인적인 성장을 돕고 교사의 수업 방법을 개선하는 데 활용되어야 한다. 나. 수학 학습의 평가에서는 학생의 인지 발달 단계를 고려하고, 교육과정에 제시된 내용의 수준과 범위를 준수한다. 다. 수업의 전개 국면에 따라 진단평가, 형성평가, 총괄평가 등을 적절히 실시하되, 지속적인 평가를 통하여 다양한 정보를 수집하고 수업에 활용한다. 라. 수학 학습의 평가에서는 선택형 위주의 평가를 지양하고 서술형 평가, 관찰, 면담, 자기평가 등의 다양한 평가 방법을 활용하여 수학 학습에 대한 종합적인 평가가 이루어질 수 있게 한다. 마. 인지적 영역에 대한 평가에서는 학생의 수학적 사고력 신장을 위하여 결과뿐만 아니라 과정도 중시하여 평가하되, 수학의 교수 · 학습에서 전반적으로 요구되는 다음 사항을 강조한다. (1) 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고 적용하는 능력 (2) 수학의 용어와 기호를 정확하게 사용하고 표현하는 능력 (3) 수학적 지식과 기능을 활용하여 추론하는 능력 (4) 다양한 상황에서 발생하는 여러 가지 문제를 수학적으로 사고하여 해결하는 능력 (5) 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직하는 능력 (6) 수학적 사고 과정과 결과를 합리적으로 의사소통하는 능력 (7) 수학적 지식과 기능을 바탕으로 창의적으로 사고하는 능력 바. 정의적 영역에 대한 평가에서는 학생의 수학에 대한 긍정적 태도를 신장시키기 위하여 수학 및 수학 학습에 대한 관심, 흥미, 자신감, 가치 인식 등의 정도를 파악한다. 사. 수학 학습의 평가에서는 평가하는 학습 내용과 방법에 따라 학생에게 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구와 다양한 교구를 이용할 수 있는 기회를 제공한다.

현장에서 교사들이 가장 관심을 갖고 있는 부분이 교수방법과 평가에 대한 실천 방법일 것

이다. 교육 방법과 평가는 수학과 교육 목표와 밀접한 관계를 가지기 마련이다. 교육 목표를 달성하기 위해 다양한 교수방법을 연구하고 개발하며, 자신의 교육 방법이 목표를 달성하는데 적절한지, 학생들이 이해하는지 확인하기 위해 평가를 한다. 현행 교육과정에서도 올바른 평가를 위해 6가지 항목으로 구분하여 지침이 제시되어 있다. 하지만 이중 나, 다 항목을 제한 나머지 항목은 실제 학교 현장에 정착하지 못하고 있다. 그 원인은 어디에 있을까?

대부분이 공감하는 원인은 입시 문제일 것이다. 대학입시에 민감한 우리나라의 경우 학년 급이 올라 갈수록 수행평가에 적용하는 과정중심의 다양한 평가방법의 시도가 학부모에게는 불공정성에 대한 염려를, 교사에게는 비효율적인 방법으로 인식되고 있다. 그런 까닭에 특목고 및 대학 입시라는 현실 문제는 평가에 있어서 교사의 역할을 위축시킨다. 입시문제는 교육에 관한 모든 논의에서 항상 중심에 있는 문제이지만 오랜 기간 동안 시원한 대안도 없었고, 문제를 해결할 방법이 사회 구조적인 문제와 밀접한 연관이 있기에 합의가 쉽지 않은 분야이어서 평가에 대한 논의에 집중하기 위해 자세한 언급은 생략하기로 한다.

또 다른 원인으로 정부의 교육정책을 지적하지 않을 수 없다. 수시로 바뀌는 교육부의 정책 또한 교사의 다양한 평가 및 역량 강화를 저해하는 요인이다. 2009 개정 교육과정이 도입된 이후 각급 학교에서 시행되는 성취평가제는 현장서 그 도입 취지를 무색하게 만들고 있다. 성취평가제는 기존의 상대평가가 가지는 한계를 극복하여 학생의 성취정도에 대한 구체적인 정보를 제공 성취하고, 수준에 적합한 다양한 학습이 가능하도록 하여 학생의 학습 능력을 향상시키고 학생들 간 무한경쟁을 탈피하여 중 · 고교 교육력을 제고하고자 만들어진 제도이다. '성취수준에 적합한 다양한 교수학습 방법에 따른 학습' '학생들간 무한 경쟁 탈피'가 골자이지만 현재 학교 현장에서는 두 가지 목적을 모두 놓치고 있다. 학생들 간의 무한 경쟁 탈피는 입시제도가 존속되는 한 해결이 어려운 사항이고, 성취수준에 적합한 다양한 학습은 여전히 큰 비중을 차지하고 있는 인지력 측정을 위한 지필평가로 인해 이전과 큰 변화가 없는 것이 현실이다. 평가 항목에 대한 정보 공시로 인해 학기 초 한 학기 평가 계획을 구체적으로 정해야 하는 과정에서 교사의 부담이 가중되고, 수업 진행 중의 학생과 교사 간의 피드백 과정에서 평가방법의 변화의 필요성이 생겨도 이미 공시한 평가 계획에 의해 진행되어야 하는 데다 수정 절차의 번거로움이 오히려 다양한 평가 시도를 막고 있다는 의견도 상당하다.

교육과정에 제시된 평가에 관한 내용 또한 학교 현장에서의 평가 방법 변화를 뒷받침할 근거로 삼기에는 부족한 부분도 있다. 간단한 예로 이번 개정 교육과정에서는 특히 초등의 경우 계산기의 사용을 명시적으로 표현하고 있으나 고등학교에서는 '공학적 도구를 사용할 수 있다'는 정도로 소극적 표현되어 있어서 현장에서 적극적으로 도입하기는 쉽지 않다.

교육과정에 제시된 교수 · 학습 방법과 평가가 현장에서 최대한 반영될 수 있도록 교육 당국의 강력하고 분명한 정책이 필요하다. 객관성을 이유로 수치로 결과가 표현되는 지필평

가 위주의 인지적 평가에만 의존한다면 교육방법과 교사 역량은 현재 수준에서 제자리걸음만 하게 될 뿐이다.
다시 한 번 강조하지만 새로운 평가 방법을 도입보다는 현행 교육과정에 제시된 평가에 대한 지침이 실질적으로 실천될 수 있도록 하는 데 교육 당국의 행정력이 집중되어야 할 것이다.

3. 학교 현장에서의 다양한 평가방법의 정착을 위한 정책 제안

가. 교사에게 실질적 평가권 부여

얼마 전 (2015. 3. 16) 교육부에서 발표한 제2차 수학교육 종합계획에 의하면 수학교육 패러다임의 변화를 추진하며 과정중심의 수업 및 평가를 적극 지원하겠다고 한다. 선다형 지필 평가를 지양하고 과정 중심의 평가가 이루어지도록 서술, 논술형 평가, 관찰평가, 자기평가 등을 대안으로 제시하며 학생의 학습 과정과 성취정도에 대한 구체적인 정보를 제공함으로써 평가를 통해 배우는 수학평가 풍토를 조성하겠다고 공언했다. 아울러 교사의 평가 자율성을 최대한 보장하되, 평가로 인한 왜곡현상이 발생하지 않도록 수학 내신평가의 신중한 접근을 주문하며 책무성 또한 강화하겠다고 한다. 이에 대한 실천 방안으로 교사의 평가 역량 강화 연수의 의무화, 평가관련정보를 자료집으로 발간, 배포를 제시하고 있다. 사실 이 내용은 새로운 것이 아니다. 앞에서 언급했듯이 지난 교육과정에도 이미 교사가 해당 단원의 특성과 목표에 따라 이에 적합한 다양한 평가를 하도록 제시하고 있다. 평가가 변화하면 학교는 확 바뀐다. 경쟁에서 승리하는 방법을 요구하던 학생이 건전한 교육 목표에 맞는 성실하고 협동하는 인성을 키우고자 노력할 것이다. 올해 PISA 2015가 ‘협업에 의한 문제해결능력 평가’를 선보인 것도 같은 맥락에서 평가 목적에 따른 바람직한 평가 방법을 선택한 것으로 볼 수 있다.
다음 기사를 보자.

최근 학교에서 시행하는 수행평가 가운데에는 단순 학업성취도평가 대신 공동의 학습결과물을 만드는 식의 프로젝트형 과제 형태를 띠는 경우가 많다. 단순히 지식을 암기하는 게 아니라 생활 속에서 지식을 접하고, 친구들과 힘을 합쳐 주어진 과제를 해결하는 것이 교과교육은 물론 인성교육 면에서도 효과적이기 때문이다. 이미 세계의 많은 교육과정에서 프로젝트형 평가의 효과를 인정하고 있다.
세계 국제학교 가운데 약 4000개교가 선택하고 있는 국제공인 학위과정 ‘아이비’(IB, International Baccalaureate)는 1958년 스위스 제네바의 국제비영리단체 아이비오(IBO)가 개발했다. 자주 거주지를

옮기며 근무해야 하는 외교관, 기업 주재원, 군인 등의 자녀들이 세계 어느 국가에서나 일관된 교육을 받을 수 있게 하기 위함이었다. 세계 어느 국가의 대학에 지원하더라도 일정한 학업 수준을 인정받을 수 있어야 하기 때문에 아이비 과정의 평가는 목적과 객관성이 분명하다.
아이비 과정에서 학생들을 평가할 때 기준 삼는 것은 각 과목 수업에서 수행한 프로젝트에서의 성실성이다. 여기서 말하는 성실성은 지필평가에서 높은 학업성취도를 보이는 것을 의미하지 않는다. 각 프로젝트에 참여할 때 얼마나 다양한 도구를 활용했는지, 프로젝트에 잘 참여하지 못하는 동료 학생들을 얼마나 잘 도와주었는지 등이 '성실성'의 척도다.
방콕 국제학교(ISB · International School Bangkok)에서 아이비 과정의 교사로 근무했던 배기성 국제학교 컨설턴트는 "아이비에서는 지필과 수행평가를 구분할 필요 없이 모든 평가가 프로젝트형 수행평가"라고 말한다.
"IB는 '혼자 잘난' 우등생을 가장 싫어합니다. 어려서부터 스포츠 등 야외활동, 독서토론을 친구들과 함께 하면서 공동체 의식을 기르고, 협동 결과물을 제출하게 하죠. 과제를 기획하는 단계부터 결과물을 낼 때까지, 모든 과정이 평가에 포함됩니다. 친구들 간의 관계는 물론 최종 결과물 이전에 내는 1, 2차 발표 등 중간과정도 마찬가지입니다."
IB에서는 평가의 목적을 협동심, 갈등 해소 및 조정능력, 인권의식, 창의력 및 탐구력 개발 등으로 정의한다. 교사들은 6개의 평가항목별로 학생에 대한 평가서를 작성하는데, 이 평가서에는 학생들의 활동에 대한 상세한 기록과 사진 등이 들어간다. 평가서의 내용은 각 지역 IBO 지역 대표부를 거쳐 스위스 제네바의 아이비오 본부의 심의를 거쳐야 공식적인 기록이 된다.
2015-04-21 한겨레신문 (정유미 기자)

IB에서 정의한 평가의 목적인 협동심, 갈등 해소 및 조정능력, 인권의식, 창의력 및 탐구력 개발능력은 우리나라의 개정 교육과정 총론에서 요구하는 핵심역량의 갖춘 인간상과 거의 유사하다. 이는 학교 본연의 사회적 역할이기도 하다. 수학과 교육과정 평가부분에서 요구하는 과정중심의 수업과 평가가 정착되도록 다양한 평가 방법이 이루어지도록 권고하는 이유이다.
만약 교육부에서 교육과정에 제시된 대로 평가하도록 철저하게 관리, 감독하겠다고 지침을 내리면 짧은 시간 안에 개선을 될 수 있을까? 아마도 현장 교사들의 불만이 하늘을 찌를 것이다. 왜 제대로 평가하도록 하겠다는데 문제가 될까? 그 이유는 그러한 지침을 내리는 교육당국이 스스로의 교육 시스템부터 개혁하지 않고 현장 교사들에게만 책임을 전가하는 것과 다름이 없기 때문이다. 지필 평가 결과와 같은 수치화된 자료만이 객관성을 인정받는 풍토에서 교사에게 평가권한을 전적으로 부여한다면 교사, 학부모 모두 문제를 제기할 것이 자명하다. 교사 · 학부모 · 학생 간의 신뢰문제가 근본적인 원인이라고 지적할 수도 있으나 보다 근본적인 원인은 경쟁 입시체제와 이에 따른 학교의 역할이 왜곡된 데 있다. 각급 학교

의 교육이념과 교훈을 보면 정직하고, 성실하며, 협동할 줄 아는 창조적인 학생을 기르겠다고 말하지만 이는 허울 좋은 껍질일 뿐 내면을 들여다보면 학생들은 경쟁에서 살아남기 위해 교과 내용을 머릿속에만 효과적으로 담으려고 애쓰고, 교사들은 명문 대학에 한 명이라도 더 보내는 것을 실질적인 교육 목표로 삼고 있다. '수학을 어떻게 더 잘 가르칠 것인가?'에 대한 고민보다 '학생들의 수능 성적을 어떻게 하면 더 잘 향상시킬 수 있을까?'에 매몰되어 있고 이를 어쩔 수 없는 현실로 받아들이고 있다. 교육과정에 적혀있는 교육 목표와 추구하는 인간상이 무엇인지 교사, 학부모, 학생 대부분 알지 못한다. 학부모들도 이러한 교육의 문제점을 지적하고 있지만 본인의 자식들 앞에서는 경쟁에서 뒤처지는 것을 두려워하며 마냥 작아지기만 하는 것이 현실이다.

언제까지 경쟁체제를 핑계로 학교의 변화를 붙잡기만 할 수는 없는 노릇이다. 학생과 학부모는 어느 나라보다도 평가에 민감하기에 다양하고 적절한 평가가 정상적으로 이루어지면 오히려 학교의 위상과 역할을 생각보다 빠른 시기에 본연의 사회적 역할을 하도록 변화시킬 수 있다고 믿는다. 그럼 지금 시점에서 가장 먼저 해야 할 일은 교사들이 교과목의 성격에 맞게 적절한 평가 방법을 선택하고 시행할 수 있도록 평가시스템을 만드는 일이라고 본다. 적절한 평가 방법의 선택은 교사의 전문적 역량에 따라 이루어져야 한다. 교육의 모범 국가로 손꼽히는 핀란드에서는 학부모들이 신뢰도에 가장 걱정하는 영역인 정의적 영역의 평가를 큰 문제없이 시행하고 있다고 한다. 어느 학생의 시험성적이 7점이더라도 수업시간의 학생의 모습을 성적에 반영하여 8점으로 올라갈 수도 있고, 반대로 6점으로 점수가 깎일 수도 있다고 한다. 수학을 학습하는 태도 또한 중요한 평가요소 이기에 이러한 점을 학부모들도 이해하고 있다(류희찬 외, 2011). 따라서 학생과 학부모로부터 이러한 평가 방법을 선택한 이유를 설명하고 평가 과정과 결과에 대한 교사-학생간 피드백 작업을 통해 평가방법의 신뢰도를 높이는 것이 가장 중요하다. 교사들도 기존의 평가 방법의 문제점을 직시하고 현장 연구를 바탕으로 한 연수를 통해 각종 평가 기법에 대해 공부해야 한다. 평가전문성도 교사가 갖추어야 할 중요한 역량이기 때문에 교육부나 교육청을 비롯한 교육 행정 기관은 교사들의 평가전문성을 신장시키기 위한 지원을 아끼지 말아야 할 것이다.

평가 후 배부되는 성적표는 – 성적표 양식의 변화도 반드시 필요하다 – 평가의 마지막이 아니라 학생들과의 소통의 메신저이고, 이는 좀 더 좋은 교육을 위한 소중한 자료이다. 학생과 학부모는 평가의 객관성 및 신뢰도에 대해 걱정하는 부분이 있기 마련이다. 하지만 좀 더 객관적이고 신뢰도 높은 평가가 이루어지기 위해서 교사에 대한 실질적 평가권 부여는 더욱 필요하다. 여기서 '실질적 평가권 부여'라 함은 법적으로 교사의 평가 권한과 책임을 명시함을 뜻한다. 특히 우리나라의 경쟁 입시 체제 내에서 법적으로 보호받지 못한 상태에서 교사는 맘껏 전문성을 발휘하여 평가하기 어렵다. 물론 평가 과정에서 학부모, 학생들이 평가 목적, 방법, 채점기준 등에 대한 정보를 공유하고 이를 소홀히 함으로 인해 야기된 문제에 대한 책

임도 분명히 해야 한다. 사실 교사입장에서 평가라는 일은 상당히 부담스럽고 힘든 일이다. 의사가 환자가 부담스럽고 치료과정이 힘들다고 해서 본연의 일을 피할 수 없듯이 평가는 교사가 분명 전문가이고 감당해야 할 일이다. 그러한 측면에서 교사가 수업과 평가라는 본연의 업무에만 충실할 수 있도록 소위 '잡무'에서 벗어나게 하는 제도적 뒷받침이 필요하다.

나. 대학입시에서의 내신 반영 비율의 실질적 증대

평가 방식에는 선다형, 단답식, 토론과제, 논술, 프로젝트, 면담, 보고서 등 다양한 평가 방식이 있다. 실제로 학교 현장에서는 정기고사는 선다형, 단답식, 서술형을 중심으로, 수행평가를 통해 논술, 프로젝트, 보고서 평가가 이루어지고 있다. 문제는 이러한 평가방법을 선택한 이유가 무엇이냐에 있다. 교사가 선택한 평가 방법을 통해 학생들의 사고과정과 능력을 진단하여, 학생들의 능력을 좀 더 발전시킬 수 있도록 하기 위한 평가 본연의 목적을 따르고 있는가? 조금 노골적으로 현재 학교에서의 평가의 목적은 성적표에 등급을 부여하기 위해 줄 세우기를 위함이라 할 수 있다. 우리나라의 학교교육을 비롯한 모든 교육은 국가 교육과정의 총론과 각론에 제시된 교육 목표를 성취하는 방법보다는 대학입시라는 평가 결과에 방점을 두고 있기 때문이다. 또한 교사들은 평가 방법을 자율적으로 선택할 실질적인 권한이 없다. 많은 교사들이 이러한 문제의식을 갖고 있지만 입시와 관련한 것은 매우 민감한 사안이라 적극적으로 개선을 요구하기 힘들다. 즉 현재의 수능이 그대로 존속하고, 당락에 상당한 영향력을 주는 체제라면 학생들은 수능 형태의 평가에 적응하려고 노력할 것이고 결국 학교 현장에서도 다양한 평가의 시도가 이루어지기는 어렵다.

선다형, 단답형 문항으로 구성된 현재의 수능은 학생이 가지고 있는 수학적 능력 중 일부만 평가할 뿐이다. 따라서 대학입시에도 수능 시험의 결과는 전체 전형요소 중 일부분만 반영되도록 실질 반영률을 낮추어야 한다. 수능시험의 자격고사화도 고려할만한 하다.

앞서 언급했듯이 교육과정에서는 인지적 영역과 정의적 영역을 평가하도록 제시하고 있다. 하지만 수능처럼 수치로 표현된 인지적 영역 평가가 학생의 수학 학습능력의 대부분을 대변하고 있다는 점은 분명 잘못된 것이다. 선다형, 단답형 문항을 해결하는 능력은 뛰어나지만 용어를 정확하게 사용하여 수학적 의사소통능력이 부족한 학생이 있다면 현재 상황에서 교과세부 능력에 이러한 내용을 그대로 기재하는 것은 어렵다. 반대로 지필평가 점수는 부족하지만 수학적 의사소통능력이 뛰어난 학생이 있을 수 있다. 전자는 소위 명문 대학입학에 유리하지만 후자는 쉽지 않은 것이 현실이다. NCTM에서 제시한 '학교수학을 위한 원리와 규준'에서도 평가가 하나의 도구나 기법에 의존해서는 안 된다는 점을 강조하고 있다.

〈표 V-2〉 NCTM에서 강조하는 평가 원리

평가 원리
– 평가는 수학의 학습을 지원하는 데 초점이 맞추어져 있어야 한다. 그리고 교사와 학생 모두에게 유용한 정보를 제공하여야만 한다. – 평가는 교육적인 결정을 하기 위한 귀중한 도구 =〉 모든 학생들을 위한 심화학습과 양질의 학습을 제공하기 위하여, 평가와 수업은 반드시 통합되어 평가가 방해보다는 오히려 교실 활동의 일상적인 부분으로 되어야 한다. – 효과적인 결정을 내리기 위해 교사들은 다양한 평가방식에 의한 다양한 출처로 부터 증거의 수렴점을 찾아내야한다. 형식적인 평가는 학생들이 매우 특별한 상황에서 할 수 있는 것으로 하나의 견해만을 제공한다. 따라서 평가에 대한 과장된 신뢰는 학생들의 수행 과정에 대해 왜곡된 묘사를 할지도 모른다. – 교사는 학생들이 그들이 알고 있고 할 수 있는 것을 명백하게, 완전하게 증명할 기회를 가져야 한다는 것을 확실히 해야 한다. – 평가는 교사의 수업준비와 전문성 개발에 초점을 맞추어야 한다.

각각의 평가 방법은 교육과정에 제시된 다양한 교수 방법과, 학생들의 학습 과정을 반영할 수 있어야 하고, 신뢰할 수 있는 타당한 정보를 제공해야 한다. 이러한 점을 비추어 볼 때, 학교 현장에서의 평가가 가장 중요시 되어야 한다. 학교 현장에서의 평가를 중시하려면 대입 전형요소 중 내신 성적의 실질적인 반영률을 높일 필요가 있다. 물론 학교에서의 평가도 선다형, 단답형 위주의 평가 방법을 반드시 개선해야 할 것이다. 내신에서 수치로 표현되는 정보는 평균과 원점수 정도만 제공하고 성취기준과 정의적 영역에 따른 평가 기준에 따라 지도한 학생의 수학적 능력을 글로 써 주고, 대학에서는 면접을 통해 기록의 사실 여부 정도를 파악하여 학생을 선발했으면 한다. 이러한 제안이 현실화 되려면 교육 주체들이 참여하는 독립된 공식 기구가 필요하다. 그곳에서 각각의 교육주체들이 치밀한 연구와 치열한 논의를 통해 서로 소통함으로서 공감할만한 제도를 만들 수 있을 것이다.

다. 수능에서의 문항 출제 및 유형의 개선

앞선 제안에서 대입 전형에서의 수능의 영향력 최소화를 언급했다. 수능을 자격 고사화 또는 영향력을 최소화 한다는 전제하에 현행 수능의 학생의 인지적 영역을 제대로 평가하고 있는가도 짚어볼 필요가 있다. 미국의 SAT를 비롯한 몇 몇 국가들이 선다형 문항으로 평가를 하고 있지만 그 결과가 대입에 결정적인 영향력을 갖지 못하는 것도 평가 방법에 대한 이유 때

문일 것이다. 게다가 학교에서 다양한 과정 평가가 이루어진다면 현재의 선다형, 단답형 평가는 학생들에게 또 하나의 부담으로 다가가게 된다. 학교에서 과정 중심의 평가가 이루어질 때 수능이 여전히 결과 중심의 평가를 고집한다면 수험생 입장에서는 이중부담을 해야 한다. 평소 학교 수업과 그에 준하는 평가가 수능을 준비하는 데에 별 도움이 안 된다고 생각하기 때문에 수능 공부는 고스란히 사교육의 몫으로 남을 가능성이 크다. 특히 한 문항 당 배점이 높고, 변별력이 큰 수학 영역의 단답형의 경우 정답률이 5% 미만인 어려운 문항도 나오기도 하는데, 오답자들 가운데는 풀이과정을 함께 제시할 경우 상당한 부분점수를 받을 수 있는 학생들도 많다는 점에서 오히려 비교육적인 평가라고 할 수 있다. 따라서 수능 문항도 학생들이 문제 해결 과정을 적고 이를 평가할 수 있는 형태도 바꿀 필요가 있다.

독일, 영국, 프랑스, 호주, 싱가포르 등을 비롯한 대부분의 국가들이 이미 국가 수준의 시험에서 서술형, 논술형 문항을 출제하고 있다.

[그림 V-1] 호주 대입 시험문제지 표지

MATHEMATICAL METHODS (CAS)

Written examination 2

Thursday 6 November 2014

Reading time: 3.00 pm to 3.15 pm (15 minutes)
Writing time: 3.15 pm to 5.15 pm (2 hours)

QUESTION AND ANSWER BOOK

Structure of book

Section	*Number of questions*	*Number of questions to be answered*	*Number of marks*
1	22	22	22
2	5	5	58
			Total 80

[그림 V-2] 호주 대입 시험의 선다형 문항(Section1)

SECTION 1

Instructions for Section 1

Answer **all** questions in pencil on the answer sheet provided for multiple-choice questions.

Choose the response that is **correct** for the question.

A correct answer scores 1, an incorrect answer scores 0.

Marks will **not** be deducted for incorrect answers.

No marks will be given if more than one answer is completed for any question.

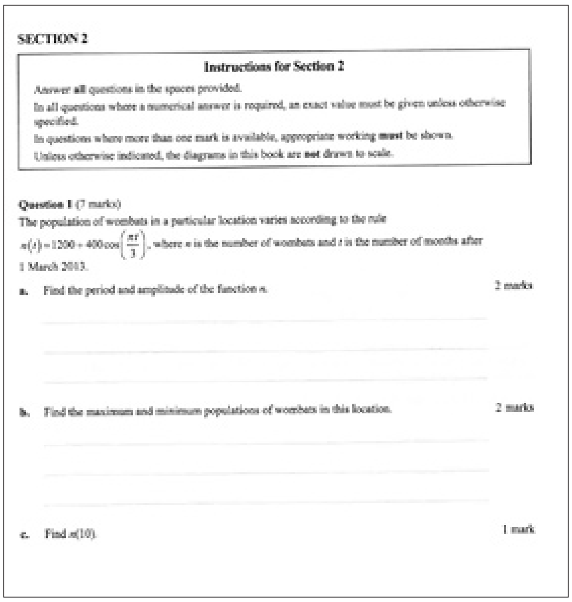
Question 1

The point $P(4, -3)$ lies on the graph of a function f. The graph of f is translated four units vertically up and then reflected in the y-axis.

The coordinates of the final image of P are

A. $(-4, 1)$
B. $(-4, 3)$
C. $(0, -3)$
D. $(4, -6)$
E. $(-4, -1)$

[그림 Ⅴ-3] 호주 대입 시험의 서술형 문항(Section2)



SECTION 2

Instructions for Section 2

Answer **all** questions in the spaces provided.
In all questions where a numerical answer is required, an exact value must be given unless otherwise specified.
In questions where more than one mark is available, appropriate working **must** be shown.
Unless otherwise indicated, the diagrams in this book are **not** drawn to scale.

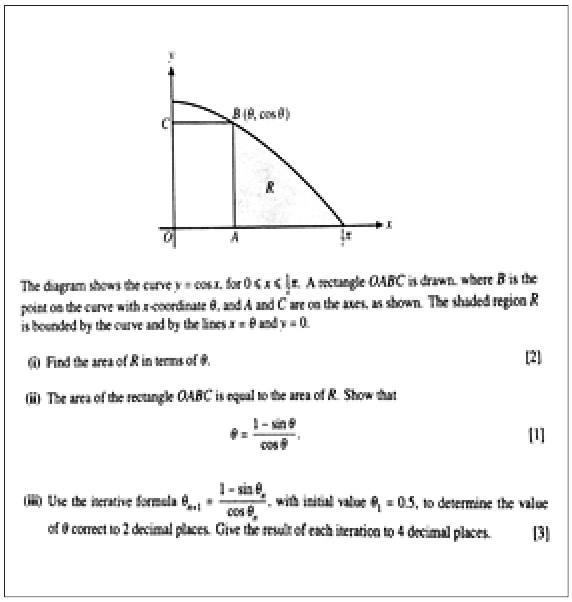
Question 1 (7 marks)
The population of wombats in a particular location varies according to the rule
$n(t) = 1200 + 400\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$, where n is the number of wombats and t is the number of months after 1 March 2013.

a. Find the period and amplitude of the function n. 2 marks

b. Find the maximum and minimum populations of wombats in this location. 2 marks

c. Find $n(10)$. 1 mark

[그림 Ⅴ-4] 영국 A 레벨 시험 5번 문항(2012)



The diagram shows the curve $y = \cos x$, for $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\pi$. A rectangle $OABC$ is drawn, where B is the point on the curve with x-coordinate θ, and A and C are on the axes, as shown. The shaded region R is bounded by the curve and by the lines $x = \theta$ and $y = 0$.

(i) Find the area of R in terms of θ. [2]

(ii) The area of the rectangle $OABC$ is equal to the area of R. Show that

$$\theta = \frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta}. \qquad [1]$$

(iii) Use the iterative formula $\theta_{n+1} = \frac{1 - \sin\theta_n}{\cos\theta_n}$, with initial value $\theta_1 = 0.5$, to determine the value of θ correct to 2 decimal places. Give the result of each iteration to 4 decimal places. [3]

[그림 Ⅴ-1, 2, 3]은 2014년 호주의 빅토리아 주의 대학입학 시험 문제지이고, [그림 Ⅴ-4]는 영국의 2012년 A레벨 문제지의 일부이다. 그림에서 확인할 수 있듯이 호주도 객관식 5지선다형 문항 22문항이 출제 된다. 그런데 주목할 점은 그림 4의 문제지 표지에 제시된 배점을 보면 5지선다형으로 출제되는 Section1의 배점은 22점(한 문항 당 1점), 이고 서술형으로 출제되는 Section2의 배점은 5문항에 58점을 부여하고 있다. 또한 호주와 영국의 서술형 문항을 보면 수치화한 답을 구하는 문제도 있으나 조건에 맞는 함수를 찾기, 식 증명하거나 표현하기, 과정 설명하기 등을 묻는다. 이는 학생들이 문제를 해결하는 과정도 평가함으로서 학생의 수학 능력을 좀 더 정확하게 파악하기 위함이다.

난이도를 교과서 수준을 넘지 않도록 하고, 출제와 채점을 현장 교사가 주도적으로 하도록 하는 등 문항 출제의 원칙을 교육과정에 부합하도록 제대로 만들어 시행하면 서술형 평가를 위해 따로 사교육에 의존하는 일은 충분히 예방할 수 있다.

미국 오하이오 주의 경우 서술형을 총체적 채점법에 따라 채점이 이루어지는데 공정한 평가를 위한 채점자의 신뢰도를 높이기 위해 배점별 예시 답안과 예상 반응 자료를 채점자에 제공하고 있다. 또한 채점자는 온라인에서 제시된 학생들의 예상 답안을 통해 연습 채점을 한 후 채점 연습의 결과를 알려주어 이러한 피드백 자료를 통해 채점자 일관성과 공정성을 유지한다고 한다. '사교육 걱정없는 세상'에서 매년 꾸준히 하고 있는 대학별 논술시험 분석 결과에 의하면 논술 문항의 대부분이 본고사 형태라는 것이다. 사실 대학별로 시행함으로 인해 서로 다른 문항 유형에 적응하기 위해 사교육의 힘을 빌릴 수밖에 없는 상황이다. 이를 극복

하기 위한 대안으로 수능 문항 유형의 변화가 이루어지면 비슷한 능력을 평가하는 대학 논술 고사를 폐지하는 것이 옳으며, 인지적 영역에서 과정 평가를 중시함으로서 학교 수업 정상화에도 기여하는 바가 클 것으로 기대된다.

라. 우리나라 교과서에 수록된 문제 및 과제에 대한 개선

학교 현장 교육의 변화를 이끄는 주체는 교사이다. 하지만 중등, 특히 고등학교에서의 수학 교육 방법은 몇 십 년 동안 큰 틀에서 변화가 없다. 다양한 원인이 있겠지만 직접 수업에 활용되는 교과서의 변화가 어느 정도의 수업의 변화를 도울 수 있다는 입장에서 교과서에 수록된 문제와 과제가 좀 더 개념 지향적이며 학생 활동 지향적으로 개선되기를 희망한다. 지금까지 수차례 개정된 교육과정에 따라 교과서 또한 초기의 그것보다 많은 변화가 있는 것은 사실이다. 그런데 수학교과서의 경우 유독 변하지 않은 것이 있다. 본문, 예제, 문제, 연습문제로 이루어지는 기본 구성도 그렇지만 문제의 성격 또한 거의 변화가 없다. 김미희, 김구연(2013)은 최근 고등학교 교과서에 수록된 문제와 과제들을 분석하며 우리나라 수학교과서가 학생들의 수학 학습 과정을 지원하기 위해 대부분 이전의 지식과 경험 등의 단순한 기억에 의존하여 해결하는 수학 과제나 구체적인 알고리즘적 절차를 이용하여 정확한 답을 구하는 수학과제들로 제시하고 있다.

〈표 Ⅴ-3〉 우리나라의 수학교과서 2종의 수학적 과제 분석결과

인지적 노력수준 / 교과서	Low-Level		High-Level	
	M[17]	PNC[18]	PWC[19]	DM[20]
A	5% (74/1376)	88% (1207/1376)	6% (86/1376)	1% (9/1376)
B	3% (41/1189)	91% (1085/1189)	6%(59/1189)	1% (4/1189)
소계	5% (115/2565)	88% (2292/2565)	6%(145/2565)	1% (13/2565)
총계	94% (2407/2565)		6% (158/2565)	

17) Memorization[M] Task 용어와 기호, 정리, 정의에 대한 빈칸 채우기 등과 같은 단순 암기를 통해 확인해 보는 문제
18) Procedure without Connections[PNC] Task 잘못된 계산 과정 및 오류 수정의 문제
19) Procedure with Connections[PWC] Task 과제 해결시 학습한 개념의 성질, 과정, 의미를 고려하여 비교, 토론, 증명하는 수학 과제
20) Doing mathematics [DM] Task 과제에 대한 해결 전략과 다양한 해결 방법의 가능성을 탐구하도록 유도하는 수학 과제

표에서 분석 대상이 되었던 교과서에 수록된 2565개의 과제 중 2470개(94%)가 인지적 노력 수준의 관계를 적용한 분석틀에서 Low-Level Task에 해당되는 과제로 분석되었고, High-Level Task에 해당되는 과제는 158개(6%)에 불과했다고 한다.[21] 같은 이론적 배경으로 다른 나라의 교과서에 수록된 문제를 분석한 결과를 보면 미국 중등학교의 경우 조사대상 8권의 교과서중 High-Level Task에 해당되는 과제 비율이 60%인 교과서는 1개였고 나머지 7권은 74%부터 심지어 100%인 교과서도 있었으나, 초등교과서의 경우는 Low-Level의 과제 비중이 9%에 불과하고, 나머지 91%가 High-Level의 과제였다.(Stein & Kim, 2009).

High-Level의 과제는 학생들의 이해력 및 사고력을 길러주고 문제해결력, 추론능력, 의사소통능력 등을 향상시킬 수 있는 기회를 제공할 뿐만 아니라, 수학적 아이디어를 논리적구조로 발전시키고 서로 연결시킬 수 있도록 학생들을 자극한다(NCTM, 2000)는 점을 고려하면 우리나라 교과서에 제시된 문제는 수학교육의 목표에 제시되어 있는 학생들이 수학적 문제 상황을 수리, 논리적 사고를 통하여 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르도록 기능하는데 충분하지 못하다는 것을 의미한다.

아래는 미국과 우리나라 교과서의 약수와 배수 부분의 교과서 예제와 연습문제의 일부를 발췌한 것이다. 질문의 서술어를 주목해서 보면 그 차이를 쉽게 알 수 있다.

21) Stein & Smith(1998)이 과제를 과제의 특징과 인지적 노력수준의 관계를 적용하여 제안한 수학과제 분석틀(Task Analysis Guide)에 의하면 수학적 개념에 대한 이해 없이 절차와 알고리즘에 의해 문제가 해결되는 과제를 Low-Level Task, 추측, 증명, 해석 등의 수학적 행동으로 대표되는 추론적 전략의 사용에 의해서 해결되는 과제를 High-Level Task로 분류하였다.

[그림 Ⅴ-5] 우리나라 중학교 교과서 예제

예 제 1 소인수분해를 이용하여 28, 56, 84의 최대공약수를 구하여라.

2) 28 56 84
2) 14 28 42
7) 7 14 21
　 1 2 3

$2 \times 2 \times 7 = 28$

● 풀이 28, 56, 84를 각각 소인수분해하면 오른쪽과 같다.
따라서 28, 56, 84에 공통으로 있는 소인수는 2, 2, 7이므로 구하는 최대공약수는

$$2 \times 2 \times 7 = 28$$

$$\begin{array}{rl} 28 = & 2 \times 2 \qquad\qquad \times 7 \\ 56 = & 2 \times 2 \times 2 \qquad \times 7 \\ 84 = & 2 \times 2 \qquad \times 3 \times 7 \\ \hline & 2 \times 2 \qquad\qquad \times 7 \end{array}$$

답 ● 28

문제 3 다음 수들의 최대공약수를 구하여라.

(1) $2^2 \times 3^2$, $2^4 \times 5$　　(2) $2 \times 5^2 \times 7$, $3^2 \times 5^4$, $2^2 \times 5^4 \times 7^3$

(3) 54, 72　　(4) 96, 108, 150

발전 문제 4 세 자연수 a, b, c가 있다. a와 b의 최대공약수는 12이고 b와 c의 최대공약수는 18일 때, a, b, c의 최대공약수를 구하여라.

창의 UP a는 50보다 큰 두 자리의 자연수이고, a와 15의 최대공약수는 5이다. a가 될 수 있는 자연수를 모두 구하는 방법을 설명하여라.

[그림 Ⅴ-6] 한국 중학교 교과서 연습문제

최대공약수

3 두 자연수 a와 b의 최대공약수가 10일 때, a와 b의 공약수를 모두 구하여라.

최대공약수와 최소공배수

4 다음 수들의 최대공약수와 최소공배수를 구하여라.

(1) 30, 45, 75

(2) $2 \times 3^2 \times 5$, $3^2 \times 7$, $2 \times 3 \times 5 \times 7$

최대공약수와 최소공배수의 활용

5 가로의 길이가 135 cm이고, 세로의 길이가 75 cm인 직사각형 모양의 벽면에 정사각형 모양의 타일을 빈틈없이 붙이려고 한다. 가능한 가장 큰 정사각형 모양의 타일을 붙일 때, 필요한 타일의 개수를 구하여라.

[그림 V-7] 미국 교과서 Prime Time (Factors and Multiples) 예제

약수 게임 방법

1. A가 한 수를 선택하고 그 수에 원을 그린다.
2. B는 A가 택한 수의 약수를 모두 찾아 다른 색으로 원을 그린다. 이미 원이 그려진 것은 선택할 수 없다.
3. 다시 B가 새 수에 원을 그리면, A가 새 수의 모든 약수를 찾아 원을 그린다.
4. 두 사람이 차례로 수를 선택하고 약수를 찾는다.
5. 수를 택했을 때 원을 그릴 약수가 없을 경우 그 수를 택한 사람은 차례를 잃으며 그 점수도 인정되지 않는다.
6. 원을 그릴 약수가 모두 없어지면 게임을 끝나며 각 사람은 자기가 원을 그린 수를 합한 점수를 계산하여 높은 점수를 얻은 사람이 이긴다.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30

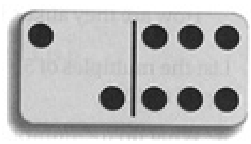
게임 후에 여러 가지 질문을 통해 스스로 다양한 성질을 발견하도록 유도한다.

- 처음에 어떤 수를 택했느냐? 그 이유는 무엇인가?
- 한 수가 다른 수의 약수가 되는 것을 어떻게 결정했는가?
- 약수를 하나 알면 또 다른 약수를 찾을 수 있는가? 이유를 설명하여라.
- 18의 약수를 나열하여라. 18을 나누는 수를 나열하여라. 약수와 나열하는 수가 같은가? 추론을 설명하여라.
- 약수가 많은 수의 예를 들어라. 약수가 적은 수의 예를 들어라.
- 주어진 수의 약수를 모두 찾았다는 것을 어떻게 확인할 수 있는가?

[그림 V-8] 미국 교과서 Prime Time(Factors and Multiples) 연습 문제

57. 40 이하의 수 중 5의 배수와 4의 배수를 나열하여라.
a. 벤 다이어그램의 공통부분에 있는 수들은 무엇인가?
b. 5와 4의 최소공배수를 찾기 위해 네가 그린 다이어그램을 어떻게 이용할 수 있는지를 설명하여라. 최소공배수는 얼마인가?
c. 40보다 큰 수까지 생각한다면 공통부분에 있게 될 수 5개를 더 나열하여라. 어떤 수든 사용할 수 있다면 공통부분에 들어갈 가장 큰 수로 가능한 수는 무엇인가?

58. 48 이하의 수 중 6의 배수와 8의 배수를 나열하여라.
a. 벤 다이어그램의 공통부분에 있는 수들은 무엇인가?
b. 6과 8의 최소공배수를 찾기 위해 네가 그린 다이어그램을 어떻게 이용할 수 있는지를 설명하여라. 최소공배수는 얼마인가?
c. 이 벤 다이어그램과 57번에서 네가 그린 것을 비교하여라. 그들은 어떤 점이 비슷한가? 서로 다른 점은 무엇인가?



60. Eric과 친구들이 도미노를 이용하여 곱셈을 하고 있다. 도미노의 각 절반에는 점이 찍혀 있다. 점의 개수는 0에서 6까지다. 학생들은 도미노 위의 두 수를 인수로 사용한다. 오른쪽 도미노를 보면 Eric은 "12"라고 말할 것이다.
a. 도미노들 위의 두 수를 가지고 만들 수 있는 최대의 곱은 얼마인가?
b. 도미노들 위의 두 수를 가지고 만들 수 있는 최소의 곱은 얼마인가?
c. 도미노의 각 절반에는 7개(0–6)의 서로 다른 수가 올 수 있으므로, Eric은 49가지의 서로 다른 곱이 나올 것이라고 추론했다. 이것은 너무 많다. 그는 무엇을 무시했는가?

수학과제의 수준이 곧 수학수업의 질을 결정하는 데에 큰 영향을 준다고 한다. 수학수업에 있어서 교사의 수업 방법과 학생의 사고 과정이 수학 과제에 의해 많은 영향을 받는다는 연구 결과도 제시되어 있는 것을 감안하면 교과서에 제시된 문제의 실질적인 변화가 교실 수업의 긍정적 변화를 이끄는 데에 적지 않은 역할을 할 것으로 판단된다. 물론 기존의 선다형 위주의 지필 평가의 변화의 필요성도 강력하게 요구될 것이다. 현재에도 경기도와 서울 교육청을 중심으로 서술형 중심의 평가를 권장하고 관련 자료를 배포하고 있다. 다른 지역에서도 지필평가에서 서술형 또는 논술형이 차지하는 비중을 늘려가며 정답의 표기 여부가 아니라 학생의 논리적 사고 과정을 통해 평가하도록 권장하고 있다. 여기서 아쉬운 점은 서술형 및 논술형 문항이 정답을 구하는 과정을 적는 것 즉, 수렴적 사고를 측정하는 문제들이 대부분이라는 점이다. 문제해결력 뿐만 아니라 창의력, 판단력, 통합력 등과 같은 보다 높은 수준의 사고 능력을 평가하기 위해서는 서술형 문항에도 변화가 필요하다. 사실 서술형 평가에 대한 정의도 각종 연구 자료나 연수 자료에 따라 제각각이어서 이러한 점은 교육정책과 교육과정을 시행하는 데에 장애가 될 수 있으며 평가의 효율성도 떨어뜨릴 수 있다고 한다(Cohen, 1995). 경기도 창의 · 서술형 평가와 미국 오하이오 주의 평가를 비교한 연구[22)]에서도 연구자는 수렴적 사고를 요하는 문항에 치우쳐 있는 경기도 서술형 평가에 비해 오하이오 주의 평가는 추론능력, 사고 유형 측면에서 고르게 문항이 배치되어 있고, 문항의 지시문에 사용된 목적어와 서술어 또한 오하이오 주 교육부에서 제시한 평가의 정의와 일치하여 일관성이 있었고, 서술형 평가 본연의 목적에 다다를 수 있도록 자료가 제공된다고 한다. 이 또한 주목할 부분이다.
아울러 계산기를 사용하는 영역에서는 이에 따른 평가 방법의 변화도 필요하다. 수학수업에서 계산기 사용이 효과적이려면 수학 수업이 공식에 숫자만 대입해 풀어내는 게 아니라 공

22) 김래영 외, 중등수학과 서술형 평가 체계의 실제와 대안적 발전 방향 모색 (2012)

식을 유도하고 증명하는 위주로 바뀌어야 하고 시험도 증명이나 서술형으로 내야 할 필요가 있다. 계산기를 사용할 경우 공식을 외워 답을 찾는 과정 보다는 그 공식을 활용해 문제를 해결하는 방법을 가르치는 데에 중점을 두어야 하므로 평가 방법에도 이에 상응하는 변화가 필요한건 당연하다. 예를 들어 우선적으로 계산기 사용이 진행되면 효과적인 영역과 그렇지 않은 영역을 구분하여 문항을 출제하는 변화가 필요할 것이다.
이러한 변화 속에서 교사는 교육과정에 제시된 정의적 영역에 대한 평가에 대해 고민하게 될 것이고, 더 나아가 학생의 수학에 대한 긍정적 태도를 신장시키기 위한 노력도 좀 더 구체화 될 것으로 기대된다. 이러한 변화에 교과서가 미치는 영향은 매우 클 것이므로 교육 과정에 부합하는 문항들이 교과서에 담길 수 있도록 관련 연구가 지속적으로 이루어 져야 하며 교과서의 개발 기간도 충분히 늘려서 의미 있는 변화를 담은 교과서가 발행되기를 희망한다.

4. 마무리 하며

지금까지의 제안을 한 문장으로 요약하면 다음과 같다.
현재 내용 영역(인지적 영역)에만 국한된 성취기준을 핵심역량을 포함하여 제시해야 하며, 핵심역량을 키우는데 적합한 교과서를 개발, 학교 현장수업에 적극적으로 적용하고, 교사들이 교육목표에 맞는 적절하고 다양한 평가방법을 선택할 수 있도록 교사에게 실질적인 평가권을 주어야 한다.
지금까지의 입시 자료 제공을 위한 평가로 인해 다방면에서 항상 많은 문제점을 노출해 왔다. 평가에 있어서 신뢰와 공정성이 중요한데 입시와 연관을 시키는 순간 학부모와 학생의 눈은 불신과 감시의 눈으로 바뀐다. 이러한 환경에서는 교육과정에서 제시하는 평가의 역할을 기대할 수 없다. 학업 성취도와 상급학교 학생 선발 자료를 제공하는 평가는 평가의 여러 역할 중 일부분에 불과하다. 줄 세우기를 위한 평가는 이제 평가의 중심에서 빠져야 한다. 교육과정에 충실한 교육을 실현하기 위한 평가 본연의 역할을 되찾기 위해 교사, 학부모, 학생이 함께 이해하고 노력하길 바라며 제안을 마무리 하고자 한다.

참고문헌

각국의 교육과정(미국, 일본, 싱가포르, 영국, 독일, 핀란드).

강영혜, 박소영, 정현철, 박진아(2007). 특수목적 고등학교 정책의 적합성 연구. 한국교육개발원 연구보고 RR 2007-5.

고상숙, 고호경, 박만구, 한혜숙, 홍예윤(2012). 수학교육평가론. 경문사.

교육과학기술부(2011). 수학과 교육과정, 교육과학기술부 고시 제2011-361호, [별책 8].

교육부(2015). 국가교육과정각론조정위원회 회의록(2015. 02. 13). 교육부 교육과정정책과.

구자억, 김홍원, 박성익, 안미숙, 이순주, 조석희(2002). 동서양 주요국가들의 영재교육. 서울: 문음사.

권지현, 김구연(2013). 중학교 수학 교과서에 제시된 기하영역의 수학과제 분석. 한국수학교육학회지 〈수학교육〉, 52(1), 111-128.

길양배(2005). 일반계 고등학교에서 수학교사들의 증명에 대한 인식과 공간논증기하 지도 실태에 대한 연구. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.

김구연(2013). 수학 교과서가 학생들에게 제공하는 수학 학습기회. 2013 대한민국 수학교육관련 학회 연합 학술대회 프로시딩, 257–257.

김남희(2006). 문제해결력 신장을 위한 Cabri 3D의 교육적 활용. 수학교육학연구, 16(4), 345-366.

김미희, 김구연(2013). 고등학교 교과서의 수학과제 분석. 대한수학교육학회지 〈학교수학〉, 15(1), 37-59.

김민희(2013). 사고양식과 수학에 대한 태도가 수학학업성취도에 미치는 영향. 원광대학교 대학원 석사학위논문.

김선희(2014). 고등학교 수학과 교육과정 개선을 위한 외국 교육과정의 탐색: 일본, 대만, 홍콩, 핀란드, 중국을 중심으로. 대한수학교육학회지 수학교육학연구, 24(4), 481-498.

김성은(2014). 우리나라의 2009개정 수학과 교육과정과 미국의 CCSSM 비교연구. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

김순남, 정광호, 박삼철, 박상완, 김세덕, 노설화, 강이화, 서원주, 이동섭(2014). 대학 입시 정책의 국제 비교 연구: 고교내신 산출 및 대입 반영 방법을 중심으로. 한국교육개발원.

김종기(2003). “독일 정부의 아젠다 2010과 교육정책”. 『교육개발』 140, 78-82.

김주남(2011). 교육용 소프트웨어를 활용한 교수-학습 과정 연구 논문에 관한 고찰. 상명대학교 교육대학원 석사학위논문.

김지원, 박교식, 이정은(2014). 2011 개정 초등학교 수학과 교육과정과 미국 CCSSM 비교 · 분석 연구. 한국초등수학교육학회지, 18(2), 279-295.

김혜선(2008). 수학 교사와 학생들의 교육용 소프트웨어 활용에 대한 실태조사 분석. 전남대학교 교육대학원 석사학위논문.

김혜연(2012). 여자고등학생의 내재적 동기와 부모의 학습관여가 학업성취도에 미치는 영향: 자기 조절학습 능력의 매개효과를 중심으로. 서울대학교 대학원 석사학위논문.

나귀수(1998). 증명의 본질과 지도 실제의 분석: 중학교 기하 단원을 중심으로. 서울대학교 박사학위논문.
나귀수, 황혜정, 한경혜(2001). 수학과 교육목표 및 내용체계 연구(Ⅱ). 한국교육과정평가원, 연구보고 RRC 2001-9.
류성림(2010). 미국 초등수학교과서의 계산기 활용 실태와 방안에 대한 분석. 수학교육논문집, 24(1), 1-27.
류성림(1993). 중학생의 기하 증명 능력과 오류에 대한 연구. 한국교원대학교 석사학위논문.
류희찬 외(2011). 외국의 수학교육현황 조사 연구. 한국과학창의재단.
류희찬, 유공주, 조민식(2000). 탐구형 소프트웨어를 활용한 기하학습내용의 구성방안 탐색. 수학교육학연구, 10(1), 139-159.
류희찬, 조완영(1999). 증명의 필요성 이해와 탐구형 기하 소프트웨어 활용. 수학교육학연구, 9(2), 419-438.
문부과학성(2009). 신학습지도요령(新學習指導要領).
문부과학성(2009). 초등학교 학습지도요령 해설.
문부과학성(2009). 중학교 학습지도요령 해설.
문부과학성(2009). 고등학교 학습지도요령 해설.
문지혜(2013). 외국 수학 교육과정의 분석을 통한 학년군제의 고찰. 경희대학교 교육대학원 석사학위논문.
박경미(2014). 2015 개정 수학과 교육과정의 개발 방향과 쟁점. 대한수학회 수학교육논총, 제31집, 41-65.
박경미, 임재훈(2002). 한국, 일본과 미국, 영국의 수학교과서 비교. 대한수학교육학회지 〈학교수학〉, 4(2), 317-331.
박교식(2014). 우리나라와 일본의 초등학교 수학과 교육과정 체제 비교. 한국초등수학교육학회지 18 (2) 279-295. 2014.08.31.
박만구 외(2013). 수학 1-1 교사용 지도서. 교육부.
박병호(2003). 논증기하와 삼각형의 오심. 홍익대학교 교육대학원 석사학위논문.
박선용, 권점례, 김부미, 남진영, 박선화, 서보억, 신성균, 이광상, 이봉주, 조성민, 조윤동, 최승현(2009). 최근 해외 수학교육 연구 동향 분석. 한국교육과정평가원 연구보고 RRO 2009-7.
박승호(1995). 초인지, 초동기, 의지통제와 자기조절학습과의 관계. 교육심리연구, 9(2), 58-90.
박철영(2012). 수학 인식론적 신념 검사의 개발 및 타당화. 전남대학교 대학원 박사학위 논문.
박혜숙, 전명남(2007). 자기효능감을 중심으로 살펴본 중학생의 국어, 영어, 수학 교과 학업성취에 미치는 학생, 교사 및 학교특성의 예측력. 교육심리연구, 21(1), 145-168.
백경선, 이영아, 이동엽, 김사훈, 김대석(2013). 교육과정 편제 및 수업시수에 대한 국제 비교 연구. 교육부.
변희현, 권점례, 박선화, 박지현, 이광상, 임해미, 조윤동, 최승현, 도종훈, 조영미, 채정림(2013). 미래 사회 대비 국가 수준 교육과정 방향 탐색: 수학. 한국교육과정평가원 연구보고 CRC 2013-22.
사교육걱정없는세상(2013). '낡은 고교체제 쇄신'을 위한 12회 연속토론회 제1~5차 토론회 자료집.
서동엽(1999). 증명의 구성요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색: 중학교 수학을 중심으로. 서울대학교 박사학위논문.
서동엽(1992). 증명지도에 관한 연구. 서울대학교 석사학위논문.
소경희(2013). 미국의 교과교육에 있어서 국가공통 기준 도입 운동의 역사적 맥락과 주요 쟁점. 교육과정연구, 31(1), 55-77.

소경희, 강지영, 한지희(2013). 교과교육과정 개발을 위한 역량 모델의 가능성 탐색: 영국, 독일, 캐나다 교육과정 고찰을 중심으로. 비교교육연구, 23(3), 153-175.

손홍찬(2011). 우리나라 수학 교육에서 공학 활용의 역사와 현황. 대한수학교육학회지 학교수학, 13(3), 525-542.

송미영, 임해미, 최혁준, 박혜영, 손수경(2013). OECD 국제 학업성취도 평가 연구: PISA 2012 결과 보고서. 한국교육과정평가원, 연구보고 RRE-2013-6-1.

송미영, 구자옥, 임해미, 박혜영, 이명애(2014). PISA 2012 결과분석을 통한 우리나라 학생들의 역량 향상 방안(2014 KICE 이슈페이퍼). 한국교육과정평가원.

신이섭, 황혜정 외(2011). 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정 연구. 한국과학창의재단, 정책연구 2011-11.

안지영(2014). 한국의 2009 개정 수학과 교육과정과 미국의 수학과 교육과정 규준 CCSSM의 비교 · 분석: 초등학교 수와 연산 영역을 중심으로. 대구교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

염시창, 박철영(2011). 수학 자기효능감과 수학성취도의 관계에서 학습전략의 매개효과 – 잠재성장모형 분석–. 한국수학교육학회지 시리즈 A 〈수학교육〉, 50(1), 103-118.

오수창(2000). 흥미유발 학습자료의 개발, 적용이 수학과 학업성취에 미치는 영향(실업계 고등학교를 중심으로). 한국학교수학회논문집, 3(2), 111-122.

우정호(2005). 학교 수학의 교육적 기초(증보판). 서울대학교출판부.

우정호(1986). 어떻게 문제를 풀 것인가. 천재교육.

이광상(2007). 엑셀을 활용한 일차함수의 과정-대상관점 형성에 대한 사례연구. 한국학교수학회논문집, 10(2), 263-288.

이미경, 곽영순, 민경석, 채선희, 최미숙, 나귀수, 최성연(2004). PISA 2003 결과 분석 연구: 수학적 소양, 읽기 소양, 과학적 소아 수준 및 배경 변인 연구. 한국교육과정평가원.

이미경, 곽영순, 민경석, 채선희, 최성연, 최미숙, 나귀수(2004). PISA 2003 결과 심층 분석 연구. 한국교육과정평가원 연구보고 RRE 2004-2-2.

이재신(1999). 학습동기 유발의 문제. 한국교육문제론(정원식, 박성수 편). 서울: 교육과학사.

이정례(2010). 학교수학 교수 · 학습에서 기술공학의 활용 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 E 수학교육논문집, 24(1), 29-48.

이종수(2013). 한국과 일본의 고등학교 수학과 교육과정 비교: 2009개정 교육과정 중심으로. 연세대학교 교육대학원 석사학위논문.

이진호(2012). 2007년 개정 교육과정에 따른 고등학교 수학 교과서에서의 ICT 활용 실태 조사 연구. 건국대학교 교육대학원 석사학위논문.

이종학(2011). 고등학교 확률 · 통계 영역에서 스프레드시트 활용에 대한 연구. 학교수학, 13(3), 363-384.

이희권(2009). 영재교육 정책: 어제와 오늘. 박학사.

임두영(2007). 외국의 수학교육과정의 비교 · 분석을 통한 교육과정 개정의 시사점 도출에 관한 연구. 아주대학교 교육대학원 석사학위논문.

임재훈, 이대현(2004). 수학과 교육내용 적정성 분석 및 평가. 한국교육과정평가원 연구보고, RRC 2004-1-5.

장경윤, 황우형, 이중권(2001). 탐구형 기하 소프트웨어(Geometer's Sketchpad)의 활용 자료 개발과 그 효과에 관한 연구. 수학교육학연구, 11(1), 193-206.

정기섭(2009). 독일의 사회통합을 위한 이주 외국인 자녀의 교육지원 현황 및 시사점 분석. 교육의 이론과 실천, 14(2), 105-134.

정미경(2008). 자기조절학습 탐구. 경기: 한국학술정보.

정보나, 류희찬, 조완영(2002). 탐구형 소프트웨어를 활용한 기하영역의 수학화 교수학습방법. 수학교육학연구, 12(4), 543-556.

정영옥(2004a). 독일의 수학 교육과정에 대한 고찰: Nordrhein-Westfalen 주를 중심으로. 대한수학교육학회지 〈학교수학〉, 6(2), 181-211.

정영옥(2004b). 수학교육 연구 프로젝트: 독일의 수학 교육과정 연구. 대한수학교육학회지 〈학교수학〉, 3(1), 131-153.

정인철, 박달원, 장이채, 김태균(2003). 탐구형 소프트웨어를 이용한 학습 환경에서 학생들의 기하 개념의 이해. 한국수학교육학회지 시리즈 E 수학교육논문집, 16, 93-108.

정종진 (1996). 학교학습과 동기. 서울: 교육과학사.

정혜영(2009). PISA 이후 독일 초등학교 교육 개혁 탐구: 개혁의 현황, 의미, 시사점. 교육의 이론과 실천, 14(3), 139-167.

조완영, 권성룡(2001). 학교수학에서의 '증명'. 대한수학교육학회지 수학교육학연구, 11(2), 385-402. 서울: 대한수학교육학회.

조윤동, 윤용식(2014). 핵심 역량 육성의 관점에서 비교한 한국과 일본의 수학과 교육과정.

조은애(2008). 학교 수학 교육에서 공학적 도구의 활용 실태와 활성화 방안. 고려대학교 교육대학원 석사학위논문.

주영주, 이종희, 김선희(2011). 수학교과에서 남 · 녀 집단 간의 학업적 자기효능감, 흥미, 외적동기 및 학업성취도의 영향력 차이검증. 교과교육학연구, 15(4), 1019-1041.

초등교육과정연구모임(2014). 핀란드 수학 교과서 분석. 전국교직원노동조합 미발간 자료집.

최수일(2015). 수학이 필요함을 가르쳐야. 서울경제신문 2015년 3월 14일자 기사.

최수일, 문종은, 이종선, 박재희(2011). 과학고등학교 및 과학영재학교 입시제도 변화에 따른 여학생 입학 양상의 추이 조사 연구. 한국여성과학기술인지원센터(WISET).

최수일, 김동원(2008). 내가 중학교 기하 영역의 교사용 지도서를 다시 쓴다면? 한국수학교육학회 학술대회 프로시딩.

최승현, 구자옥, 김주훈, 박상욱, 오은순, 김재우(2006). PISA와 TIMSS 결과에 기반한우리나라 학생의 정의적 특성 함양 방안. 한국교육과정평가원.

최인자(2005). 수학 교육에서의 컴퓨터 활용에 관한 실태 인식 연구. 대구대학교 교육대학원 석사학위논문.

최지선(2012). 수학 교과 Tablet PC 활용 교수-학습 방안 연구. 한국교육과정평가원.

추지영(2009). 중학교 논증기하 증명의 효과적인 지도방안. 경희대학교 교육대학원 석사학위논문.

핀란드 초등 수학교과서(Laskutaito) 1-6학년(2011). 솔빛길 번역 출간.

핀란드 중학교 수학교과서(Laskutaito) 7-9학년(2014). 솔빛길 번역 출간.

핀란드 고등학교 수학교과서 1-14권(2007). WSOY.

한국교육과정평가원(2015). 교과 교육과정 내용 체계 및 성취기준. 한국교육과정평가원 3차 각론조정연구자료집.

한국교육과정평가원(2013). 만 15세 대상의 국제 학업성취도 평가(PISA 2012) 결과 발표. 보도자료.

한인기(2000). 러시아 수학 영재교육에 관한 실제적 고찰: 경시대회와 수학-물리 영재 학교를 중심으로. 수학교육논집 18회 심포지엄 프로시딩, 123-155.

한희정(2013). 9시 뉴스에도 나온 '스토리텔링 수학', 웃음만 난다. 인터넷 오마이뉴스. [2009개정 초등학교 1학년 교과서 경험적 분석 ②] 수학 교과서.

허경환(2015). 교과서에 나타나는 정당화에 의한 기하영역 지도방법에 대한 분석: 중학교 2학년 삼각형의 성질 단원 중심으로. 경희대학교 교육대학원 석사학위논문.

허난, 안은경, 고호경(2011). 한국과 독일의 중학교 수학 교과서 분석을 통한 함수 내용 비교. 대한수학교육학회지 〈학교수학〉, 13(2), 323-343.

홍예윤, 고상숙(2012). 그래핑 계산기를 활용한 평가방안. 교과교육학연구, 16(4), 1045-1069.

홍창준, 김구연(2012). 중학교 함수 단원의 수학 과제 분석. 대한수학교육학회지 〈학교수학〉, 14(20, 213-232.

황혜정, 나귀수, 최승현, 박경미, 임재훈, 서동엽(2012). 수학교육학신론(2012 개정증보판). 문음사.

Algebra 1, 2, Geometry(2012). HOLT McDOUGAL.

Kemp, M., Kissane, B. & Bradley, J.(1996). Graphics calculator use in examinations: accident or design? Australian Senior Mathematics Journal, 10(1), 3, 6-50.

Kissane, B. & Bradley, J. & Kemp, M.(1994). Graphics calculator, equity and assessment, Australian Senior Mathematics Journal, 8(2), 31-44.

Michigan State University(2014). Connected Mathematics. Pearson Prentice Hall.

Ministry of Education.(1992). Mathematics in the New Zealand Curriculum. Wellington: Learning Media.

NCTM(미국수학교사협의회)(2007). 학교수학을 위한 원리와 규준[Principles and standards for school mathematics]. (류희찬, 조완영, 이경화, 나귀수, 김남균, 방정숙 역). 경문사. (원본은 2000에 출판)

Okeeffe, L.(2013). A Framework for Textbook Analysis. International Review of Contemporary Learning Research, 2(1), 1-13.

Oldknow, A., & Flower, J. (Eds.) (1996). Symbolic manipulation by computers and calculators. London: The Mathematical Association.

Schmidt, W. H., McKnight, C. C., Valverde, G. A., Houang, R. T., & Wiley, D. E.(1997). 수학교육과정 국제비교연구: TIMSS 보고서[Many visions, many aims] (진교헌, 김환복, 이영덕, 이혜성, 강정수, 조완영 역). 국립교육평가원, REAB 1997-015. (원본은 1996에 출판)

Val verde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H., & Houang, R. T.(2002). According to the Book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks. SPRINGER SCIENCE+BUStNESS MEDtA, LLC.

종합 세션 논찬

최수일 박사님의 주제 발표에 대한 논찬

박경미(홍익대학교 수학교육학과 교수)

들어가는 말

우리나라 수학교육에 대해 무한한 애정을 가지고 다양한 연구와 조사를 수행하는 한편 언론 매체를 통해 전방위적인 대국민 홍보도 펼치는 사교육걱정없는세상의 활동에 우선 감사의 마음을 전합니다. 2015 개정 수학과 교육과정 연구를 총괄하고 있는 입장에서 사걱세의 매서운 지적이 큰 자극과 됩니다. 생각해보면 수학과 교육과정 연구진과 사걱세 연구진이 수학 교육과정에 대해 숙의한 결과에 있어서는 차이가 있을지 모르지만, 학생들에게 조금이라도 나은 수학교육을 제공하고자 하는 마음은 동일합니다. 결국 같은 곳을 향해 가고 있는데, 관점에 따라 약간의 차이를 보이는 동반자적 관계라고 할 수 있겠습니다.

수능 수학의 범위

수능 수학이 수학교육을 황폐화시킨다는 지적에 대해서는 공감합니다. 자연계열의 경우 수능 수학 대상과목은 고등학교 전체 6과목 중 마지막 3과목이기 때문에 6과목을 모두 마스터해야 하고, 특히 고등학교 3학년은 EBS 교재로 반복 연습을 하는 시기이기 때문에 6과목을 2년 동안 끝내야 하는 현실에서 수학교육의 파행이 시작됩니다. 무거운 내용에 대한 빠른 진도를 감당해야 하는 고등학교 뿐 아니라 초등학교와 중학교 때부터 고등학교 자연계열 수학을 염두에 두고 소위 진도를 빼지 않으면 안된다는 불안 마케팅이 횡행하고 있습니다. 그런 면에서 수능 수학의 과다한 시험 범위는 수학교육 제문제의 핵심적인 원인을 제공합니다.

발표 원고에 따르면 수능 수학 범위에 〈기하와 벡터〉와 〈미적분II〉를 불포함시키는 안을 제안하고 있는데, 〈기하와 벡터〉에 대해서는 다양한 평가를 내릴 수 있습니다. 〈기하와 벡터〉는 분명 고등학교 수학 중 난이도가 가장 높은 과목이고 '삼수선의 정리'와 같이 난해한 내용

을 왜 모든 자연계열 학생이 배워야 하는지에 대해 문제의식을 가질 수 있습니다. 그런데 수학의 관점에서 볼 때, 진정 수학다운 문제는 기하에서 나온다고 합니다. 미적분은 어느 정도 정해진 알고리즘을 따라가는 정형화된 절차적 측면이 강한데 반해 기하는 수학적 직관력과 공간지각력 등을 요구하는 수학적으로 '아름다운' 문제가 나올 수 있기 때문입니다. 물론 여기서 아름답다는 것은 수학자의 입장이지 대부분의 학생들에게는 연습에 의해 대비가 되지 않는 '공포의 문제'가 될 가능성이 높습니다. 우리나라의 고등학교 수학 내용이 지나치게 대수와 해석학(미적분) 위주이므로, 기하 내용을 〈기하와 벡터〉 이외의 과목에도 분산하여 다룸으로써 수학의 가장 본질적인 두 분야인 '수'와 '공간'을 균형있게 다루고 학생들이 다양한 수학 주제들을 경험하게 할 필요가 있다는 의견도 공존한다는 점을 말씀드립니다.

수능 수학의 난이도

최근의 수능 수학이 쉬운 기조를 유지하고는 있는 가운데, 수능 수학 문제지의 마지막에는 고난이도의 문항들이 등장합니다. 수능에서 최상위 학생들을 1등급과 2등급으로 구분하고 1등급 내에서도 96%인지 99%인지를 결정하는 문항은 두 가지 이상의 수학적 개념, 원리, 법칙을 종합적으로 활용하는 단원통합형 문제입니다. 이런 복합적인 성격의 문제들을 해결하기 위해서는 각 단원의 내용을 익히는 것을 넘어서서 여러 단원의 내용을 창의적으로 관련지어 이해하는 것에 능숙해야 하는데, 이러한 대비는 학교 수업만으로는 이루어지기 어렵다는 것이 학생들의 중론입니다. 즉 만점방지용 단답형 문항과 같이 어려운 수능 문제는 학생들을 사교육의 장으로 끌어 들이는 중요한 요인이 되고 있습니다.
수능 수학의 평균 점수가 지나치게 낮다는 비판이 지속적으로 제기되어 왔고, 이를 의식하여 최근 수능 수학에서는 상당수 문항들이 매우 쉽게 출제되었습니다. 그러다보니 여러 개념을 복합해서 풀어야 하는 한두 개 고난도 문항의 영향력이 더욱 높아졌습니다. 그런데 문항이 전체적으로는 쉬워지다보니 앞의 문항들을 빨리 풀고 남는 시간을 이용하여 고난도 문항에 긴 시간을 투자하며 원시적인 방법(학생들의 표현에 의하면 노가다 방법)으로 해결하는 경우가 발생합니다. 그 결과 고등사고능력을 이용하여 수학적으로 우아하게 풀어낸 학생과, 일일이 대입하는 것과 같은 방식으로 푼 학생이 동등한 점수를 받게 되어 정직하게 변별을 하지 못하는 상황이 벌어지게 됩니다. 실제 2015 학년도 수학 수능에서는 B형의 만점자 비율이 4%를 넘어서면서 쉬운 수능 수학이 비판대에 오르기도 했는데, 그 이유는 다수의 학생들이 30번 문제를 다양한 원시적 방법으로 풀어내면서, 출제자들이 비장의 무기로 생각했던 30번 문제가 변별 기능을 충분히 하지 못했기 때문입니다. 결과적으로 볼 때 현재의 수능은 '상당히 쉬운 다수의 문항'과 '지나치게 어려운 한 두 문항'으로 구성되는 다소 기형적인

상태입니다. 따라서 단원통합형 신유형 문제의 수준을 낮추고 다수 문항의 수준은 약간 높임으로써 학생들을 역변별하는 등의 부작용을 줄여야 할 것입니다.

수능 수학 절대평가

등급별 비율이 정해져 있는 상대평가에서 학생들은 옆의 친구와 경쟁해야 하지만, 미리 설정된 목표의 달성 여부에 따라 등급이 정해지는 절대평가에서 학생들은 교육목표와 경쟁하게 됩니다. 원론적인 입장에서 볼 때 절대평가가 교육의 본질을 살릴 수 있는 방식임은 자명합니다. 영어에 이어 수학도 절대평가화 하자는 주장이 사걱세 등을 통해 강하게 제기되고 있는데, 입시에서 수학 영향력이 높아지면 역설적으로 수학교육은 피폐해지기 때문에, 수학의 영향력이 약화되는 것은 수학교육의 정상화라는 측면에서 환영할 만한 방향입니다.
대입 정책은 수능, 내신과 학교생활기록부, 대학별고사의 세 요소를 어떤 방식으로 조합할지에 대한 묘수풀이입니다. 현재와 같이 수능이 대입에서 핵심적인 필터 기능을 한다면 비교육적이기는 하지만 상대평가가 짝을 이루어야 하고, 대입에서 수능의 영향력을 낮춘다면 영어 뿐 아니라 수학까지 패키지로 절대평가화 하는 것이 바람직할 것입니다. 그러면서 대입 전형의 무게중심을 수능으로부터 내신과 학생부로 이동시켜야 합니다. 최근 들어 이를 위한 여건이 조성되고 있습니다. 2014년부터 고등학교에 성취평가제가 도입되면서 내신 부풀리기 현상이 어느 정도 제어되고 있습니다. 또한 학생부에 대한 신뢰가 높아지면서 학생부를 전형자료로 이용하는데 대한 대학의 저항이 줄어들고 있습니다. 정리하자면 수능 수학의 절대평가화는 수학교육을 정상화시키는데 크게 기여하겠지만, 현재의 수능 수학은 학생들을 서열화 시키는 기능을 담당하고 있기 때문에 이를 대체할 그 무엇을 마련한 후에 절대평가를 추진하는 것이 수순이라고 생각합니다.

입시에서 수학 점수 반영

대학입시에서 자연계열 뿐 아니라 인문계열 지원자들에서도 수학의 반영 비율이 높다는 점에 대한 비판은 충분히 이해가 됩니다. 각 대학의 입학처가 수학의 반영 비율을 높게 책정하는 이유는 주지하다시피 수학 점수나 등급이 학생들의 대학 입학 후 학업 성취 정도를 예측하는 가장 믿을만한 지표가 되기 때문입니다. 대학들은 수능에서 수학 점수와 등급이 높은 학생을 뽑는게 가장 안전하다고 여기는게 '불편한 진실'입니다. 대학들의 수학 우수자 편애로 인해, 수학 한 과목 부진했을 뿐인데 학창 시절에는 학업 전반의 부진아로 취급받고, 대

학 진학의 길도 막혀 버리는게 현실입니다. 수학과 관련된 일을 하는 사람으로, 수학에 변별 기능이 집중되고 입시에서도 당락을 좌우하는 상황이 달갑지 않습니다. 수학이 입시에서 중차대한 역할을 하면 할수록 활동과 탐구를 통해 수학적 원리와 법칙을 발견하는 학생들의 의미있는 경험은 요원해진다. 수학이 입시에서 좀 자유로운 과목이 되어, 학생들이 편안하게 수학 과목을 대할 수 있어야 수학에 대한 호감도도 높아지리라 생각합니다. 이를 위해 대학들이 수학 점수와 등급이라는 안전한 지표보다 다양한 척도에 의해 학생들을 선발하는 전향적인 자세가 필요할 것입니다.

교육과정의 핵심역량 반영

수학과 교육과정은 전통적으로 수학에 대한 개념, 원리, 법칙과 같은 내용의 습득에 초점을 맞추었으나, 기존의 교과 내용중심 체제가 갖는 한계가 지적되면서 내용 외에 학습자의 역량 함양을 교육과정의 목표로 하고 이를 구체화하려는 노력이 시작되었습니다. 주제 발표에서 예시한 바와 같이 핵심역량을 중심으로 하는 외국의 사례들은 흔하게 찾아볼 수 있으며, 2015 개정 교육과정의 가장 큰 특징 역시 핵심역량의 강조입니다. 수학과에서는 총론에서 제시한 핵심역량인 자기관리능력, 공동체 의식, 의사소통능력, 창의 · 융합사고능력, 정보처리능력, 심미적 감성능력의 여섯 가지를 참고하고 수학 교과의 특성을 고려하여 수학 교과 핵심역량으로 문제해결, 추론, 의사소통, 창의 · 융합, 정보처리, 태도 및 실천의 여섯 가지를 선정했습니다.

이 중에서 문제해결, 추론, 의사소통은 2009 개정 교육과정에서 '수학적 과정'으로 강조하던 바입니다. 그렇지만 2009 개정 교육과정에서 수학적 과정과 관련된 언급은 '목표', '교수 · 학습 방법', '평가'에서 이루어지고 구체적인 내용 성취기준과 연계하지는 않고 있어, 그 영향력이 제한적일 수밖에 없었습니다. 이에 2015 개정 교육과정은 수학의 구체적인 내용 성취기준과 수학 교과 핵심역량의 유기적인 연결을 시도하고자 합니다. 하지만 솔직하게 말씀드리면 현재까지는 내용 선정에 주목하였기 때문에 수학 교과 핵심역량이 내용에 스며들지 못한 상태로, 향후 '성취기준'을 통해, 그리고 '교수 · 학습 방법'과 '교과서 개발 방향'을 통해 보다 적극적으로 구현할 것입니다.

교육과정 내용 관련 쟁점

교육과정에서 수학 내용을 감축하는 방법 중의 하나는 2009 개정 교육과정과 같이 유리식+

유리함수, 무리식+무리함수의 예에서 보듯이 연결된 주제들을 통합하는 것입니다. 그런 의미에서 이차방정식과 이차함수를 결합시키는 안을 생각해볼 수도 있겠으나, 유리식이나 무리식과 달리 이차방정식은 그 의미가 중차대하므로 독립적으로 다루는 것이 필요하다고 생각합니다.

발표자는 인수분해를 이차방정식과 통합하여 그 하위요소로 포함시키는 것을 제안하고 있습니다. 관련된 내용을 결합시켜 전체적으로 내용의 양을 줄인다는 의도는 이해하지만, 인수분해 역시 그 자체로 의미가 있습니다. 만약 인수분해가 이차방정식을 풀기 위해 방법론으로만 의의를 갖는다면 굳이 가르칠 필요가 없을 수도 있습니다. 이차방정식의 근의 공식을 배우게 되면 사실 인수분해는 존재 가치가 없어집니다. 인수분해를 통해 이차방정식의 해를 구하는 것은 근의 공식을 이용하여 해를 구하는 방법의 특수한 예일 뿐입니다. Google에서는 미래 사회에 중요한 Computational Thinking의 네 가지 기능으로 분해(decomposition), 패턴 인식(Pattern recognition), 패턴 일반화와 추상화(Pattern Generalization and Abstraction), 알고리즘 디자인(Algorithm Design)의 네 가지를 제시하였습니다[1]. 인수분해는 분해(decomposition)의 전형적인 예가 되기 때문에 미래 사회에서 강조되는 Computational Thinking의 기반이 됩니다.

2015 개정 연구팀에서는 미분의 도입 방법에 대해서도 다양한 검토를 하고 있습니다. 현재까지 우리나라 교육과정에서 미분은 매우 엄밀하게 도입됩니다. 수열을 다루고, 수열의 극한, 이어서 함수의 극한과 연속성을 다룬 후 함수의 극한의 관점에서 미분을 정의합니다. 게다가 구분구적법을 하기 위해서는 수열에서 무한급수까지 다루어야 하기 때문에, 미분과 적분까지 도달하는 과정이 지난합니다. 이에 2015 개정 교육과정의 〈수학II〉에서는 무한급수나 함수의 극한을 다루지 않고 미분을 가볍게 설명하고, 〈미적분〉에서는 보다 엄밀하게 다루는 식으로 분화시키는 것도 고려하고 있습니다. 실제 상당수의 국가들이 수열의 극한과 함수의 극한을 전제하지 않고 미분과 적분을 설명하고 있고, 고등학교 차원에서 다루는 함수의 특성을 고려할 때 반드시 함수의 연속에 대해 반드시 학습할 필요는 없습니다. 한 예로 일본의 경우 〈수학II〉에서 미분과 적분을 도입하지만, 〈수학III〉에서 수열의 극한, 함수의 극한과 연속을 다루고 있는데, 2015 개정 교육과정에서는 이런 방식의 직관적인 미적분 지도를 대안으로 제시할 수도 있습니다.

---

1) https://www.google.com/edu/resources/programs/exploring-computational-thinking/

수학교과서의 선형적 구조에 대하여

발표자는 서구권의 교육과정은 나선형 구조를 가지고 있어, n학년에서 비형식적이고 직관적으로 다룬 후, n+1학년에서는 보다 형식화, 추상화하여 다루면서 점진적으로 개념과 원리를 심화시키는 학습자 친화적 특성이 있다고 보았습니다. 그에 반해 우리나라 교육과정은 학년간의 내용 겹침을 최소화한 선형적(linear) 구조를 갖는다는 점을 비판적으로 보았습니다. (물론 초등학교의 수와 연산이 확장되는 과정이나, 중학교 3학년과 고등학교 1학년의 이차방정식, 이차함수를 보면 나선형 구조가 어느 정도 반영이 되어 있습니다.) 이런 선형적 구조가 된 원인 중의 하나는 주지하다시피 학습내용 경감을 이루기 위해서 중복적인 요소들을 삭제해왔기 때문입니다. 그와 더불어 또 하나의 중요한 요인은 현재보다 하위 학년에서 어떤 개념이나 원리를 도입하게 되면, 아무리 직관적으로 소개만 하라고 해도 그 개념과 원리를 통해 다룰 수 있는 가장 고난이도의 문제까지 등장하는게 한국적 현실입니다. 예를 들어 초등에서 x를 도입하고 ㅁ를 대체하는 문자의 의미를 가볍게 다룰 수 있지만, 그렇게 되면 거의 대수적인 방정식까지 다루는 현상이 다양한 문제집을 통해 나타납니다. 이처럼 하나의 내용이 포함되면 이를 자체적으로 극대화시켜 구현하는 경향 때문에 내용을 여러 학년에 걸쳐 가볍게 다루며 자연스럽게 심화시키기 어렵습니다.

나가는 말

수학과 교육과정의 양이 과다하고 난이 수준이 높다는 것이 수학포기자를 양산하고 사교육을 유발하는 면이 없지는 않지만, 다른 요인들도 복합적으로 작용합니다. 저는 수학포기자를 획기적으로 줄이는 방법 중의 하나는 후행학습을 제공하는 것이라고 생각합니다. 수학은 위계성이 뚜렷하기 때문에, 어느 한 학년에서 생긴 학습결손은 지속적인 영향을 미치고, 그래서 학생이 어느 순간부터 수학을 공부하고자 해도 그 결손을 보완하지 않는한 노력은 수포로 돌아가고 맙니다. 따라서 n학년에서 학습의 어려움이 있다면 n−1학년, n−2학년, …, 과 같은 식으로 거슬러 올라가 최초의 학습결손이 발생한 지점에서 다시 시작해야 합니다. 이런 후행학습이 절실한 학생이 많은데, 학원에서는 선행학습만 제공하고 있습니다. 공교육 차원에서 후행학습을 지원해야 하고, 사교육이 어느 정도 상수(常數)라는 점을 고려할 때 차라리 선행보다는 후행학습을 하는 학원으로 바뀌어 가는 것이 학생들의 정신 건강을 위해 바람직하다고 생각합니다.

외국수학교육과정과 우리 수학교육과정을 바라보며 질문을 던지다.

이동흔(전국수학교사모임 회장)

– 우리는 왜 국제 비교라는 방식으로 우리 수학교육의 방향을 정하려 하는가? 우리가 먼저 국제 사회에 수학교육과정의 새로운 방향을 제시할 수는 없는 것인가?(여는 질문이다. 본인은 외국교육과정이라 할지라도 일단 의심을 통해 관찰한 후, 이를 기반으로 정반합의 과정을 거쳐 바람직한 대안을 찾아야 한다고 생각한다.)

1. 본인은 다음 발제에 긍정적이다.

– 공식중심이 아닌 사고 중심의 교육과정을 구성하려는 의도에 공감한다.(사고 중심 활동의 기회부여)

– 교사중심이 아닌 자기 주도적 발견학습의 기회를 녹인 동기 부여형 교과서 개발에 공감한다.(학생중심의 자기 주도적 교과 활동 기회부여)

– 학교 공동체가 운영될 법을 학생들 스스로 만들어 학생자치를 수행하듯이 수학공부를 하는 가운데 학생주도의 다양한 형식화, 여러 학생들 간의 합의된 형식화, 전체 학생의 일반화된 형식화(수학화)를 교과 시간에 체험적으로 경험하여 자신만의 수학 원리를 구성하고 이를 바탕으로 교실 공동체의 수학 원리를 만들어지도록 교과서 속에 사고 활동이 가능하도록 구성해주여야 한다. (협력학습의 기회부여)

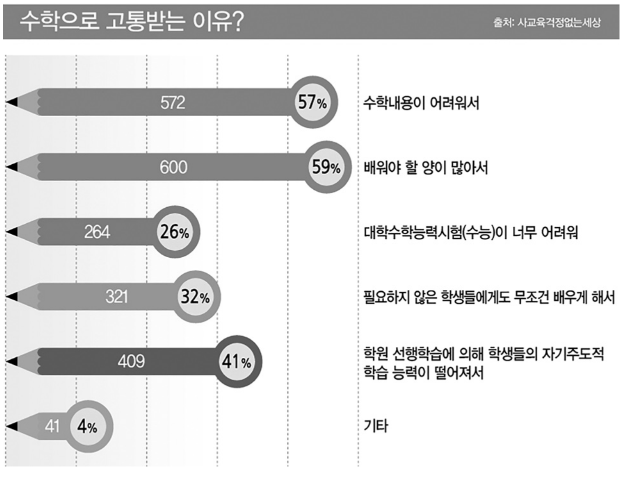
– 이 과정에서 수학중심의 사고는 무의미하기에 자연스러운 영역 통합이 이루어지게 된다. 즉 우리가 배우면 배울수록 수학을 합리적인 논리정신이라 할 수도 있고 최적화된 판단을 찾는 원리라 할 수도 있고 자연이나 사회현상이 갖는 특징을 찾아 분석하는 원리라 할 수도 있

고 기하학적 현상에서의 모양을 탐구하는 원리라 할 수도 있다. 즉, 수학은 기호 상징과 언어 상징이 빚은 합작품이다. 이에, 수학은 더 이상 수학이 아닌 철학이요, 언어요, 논리요, 삶이다. 따라서 미래사회의 수학교육 성취를 위해선 융복합이 불가피하다. 여기서 융복합이란 논리적인 사고를 기반으로 한 소재의 융복합을 의미하며 이를 구현한 외국교과서 사례를 참고하여 우리교육에 적용시키거나 우리가 먼저 개발해 융복합 상황을 구성하는 것은 무엇보다 중요하다.(융복합 학습의 기회부여)

– 외국교과서에 일반화되어 있는 계산기, 공학도구가 우리 교과서에도 일반적으로 적용될 시기가 되었다고 봄.(공학도구 사용 환경의 대중화)

2. 여기서 잠시 짚고 넘어가야할 문제를 고민해 교과서 개발에 녹여보기로 하자. 학생들이 수학으로 고통 받는 진정한 이유는 과연 무엇일까?

– 학부모가 가지고 있는 수학교과에 대한 선험적 두려움이 자녀에게 투사되어 수학 교과에 대한 자녀의 불안요인이 강화된 상황을 왜 고려하지 않을까? 수학 교과 시간에 다른 교과보다 더 많이 등장하는 부정어로 인하여 학생들이 받게 된 정서적 불안 증대는 왜 고려하지 않았는가? IT중심의 한국문화는 빨리빨리를 낳고 빨리빨리를 외치는 문화적 상황은 연습장을 사용해 문제를 해결하는 학생층의 축소를 낳고 이런 현상은 인내가 사라진 사회를 만들게 되었다. 그렇다면 이 시대의 인내는 어떻게 가르쳐야 할까?



– 우리는 학생들의 생각을 존중하며 수학을 대화식으로 가르치고 있는가? 모든 교과목 중에 학생의 생각을 가장 존중치 못하는 교과목이 수학일 수도 있다. 수학교실에 무언의 폭력적

대화가 넘쳐나고 있다. 우리가 무엇인가를 가르치려 마음을 먹는 것도 하나의 폭력임을 이해해야 한다. 따라서 수포자 양성의 요인을 학습량으로 몰아가는 것은 잘못되었다고 본다.

- 우리는 학생들에게 기호의 진정한 의미를 가르치는가? 아니면 형식화된 정리의 활용을 가르치는가? 현 교육과정에서 학생들이 배워야 할 수학교육과정 상의 학습량이 진실로 많은 양일까? 교육과정 안에서 발생한 수학적 상황을 유형화하여 연습시키는 기교 시간의 확대로 정말 중요한 사고, 개념, 원리, 기호를 가르칠 시간을 확보하지 못하는 것은 아닐까?
수능시험을 어렵게 내려는 문화는 무엇을 의미하는가? 수학이 필요하지 않다고 교육과정 내에서 수학수업시간을 축소시키는 사회적 상황을 무엇으로 설명할 수 있을까? 고등학교에서 배운 수학은 사회에서 전혀 필요 없다고 말하는 상황을 어떻게 설명할 수 있을까? 수학을 전혀 배우지 않은 학생이 우수한 대학에 들어가 우수한 성적으로 졸업하는 현상을 어떻게 설명할 수 있을까? 우리는 수학교육 밑바탕부터 완전히 수정할 교육과정의 진정한 대안을 마련해야 할 시기가 되었다. 우리는 단순한 방법으로 외국 교육과정과 비교하여 우리교육 문제를 짚어서는 절대 안 된다.

3. 본인은 다음 발제에 대하여 이견을 갖는다.

- 우리가 가르치는 학생들이 직관적인 일차사고에서 이성적인 이차 사고로 전환시켜 깊이 있는 사고 상황을 만들어 내려면 우리는 어떻게 강의를 해야 할까? (이 강의가 가능하도록 교과서 및 교육과정을 구성해야 한다.)
학생이 사고하고, 학생이 만들어가고, 학생이 구성하고 ,학생이 추론하고, 학생이 학생과 의사소통을 하고, 학생이 현상에서 수학적인 활동을 전개하고, 학생이 문제 상황을 해석하고, 학생이 기호와 수의 특징을 찾고, 소통하며, 각자 자신만의 수준에서 수학적 활동을 수행할 수 있도록 개인차가 인정되는 교실은 만들어 질 수 있을까? 이런 교실이 구현되어야 학생들은 학습을 즐기기 시작한다. 이 때 무엇보다 중요한 것은 학생 개인의 공부에 대한 자아 성취이다. 이 상황에서 경쟁보다는 협력이 더 중요하다. 우리 교육의 가장 큰 문제는 중심까지 파고든 경쟁논리이다. 경쟁상황에서 머리가 돌아가는 사람은 누구도 없다. 자유로운 사고 환경이 교실에선 필요하다. 이를 위한 협력적 사고와 활동이 구현될 수 있는 소통적 교과서 개발이 필요하다. 외국 교과서를 보면 이런 노력이 이루어진지 오래되었다. (하지만 아쉬움은 있다. 외국 교과서도 결국 연역적인 결과를 가르치기 위한 형식 과정에 불과하다. 교육 목표를 정하되 교실 수업에 들어가기 전 교사가 마음속으로 정하고 학생 스스로 그 목표를 찾고 다양한 활동을 수행하고 합의하도록 지도한다.)

– 정의적 영역의 성취 수준을 높일 대안이 학습량의 경감이라 정의(고려)할 수 있을까? 인간은 인간 자신의 장점이나 자신만이 가지고 있는 남다른 장점이 구현되는 상황에서 정서적인 안정과 자신감이 회복된다. 우리 수학교실은 어떠한가? 우리는 교실의 절대 다수의 학생들에게 “유리수가 무엇인가?” 라는 질문을 했을 때 교실은 어떤 반응을 보일까? 우월적인 자신을 보이기 위해서 목청을 높이는 학생이 있는가하면 정확히 유리수의 의미를 몰라 두려워하는 상황이 발생하게 마련이다.(사회의 축소판) 이 상황에서 모든 학생의 정서적인 상처없이 교실 수업이 전개되려면 무엇이 가장 급선무일까? 왜 조선시대에는 수학에서의 정의적 영역 문제가 지금보다 더 중요하게 작용하지 않았을까? 그것은 엄청난 경쟁의 상황이 오늘날 그 작은 교실상황에 들어와 있기 때문이다. 이 경쟁 상황 하에서 모르는 사람은 약자요 멍청이라 여겨지는 사회가 이미 만들어져 있기 때문이다. 생각을 다시 교실로 돌려보자. 우리는 학생들에게 어떻게 다가가고 있는가? 바로 여기에 정의적 영역의 문제발생의 원인이 있다 할 수 있다.(인간이 상처받는 원인은 외부적인 여건이 본인의 자존감에 두려움을 주었기 때문이다.)

– 동일한 학습 주제에 대한 학년단위의 나선식 배열은 흥미를 잃은 수포자 학생들에게 회생의 기회를 부여하고 수포자 학생들의 학습의욕 고취에도 도움을 주기에 좋은 개선책이라 할 수 있을까? 수포자의 해결의 진정한 대안이라 할 수 있을까?

– 우리나라에서는 수학을 가르치는 시간이 국제적 평균 수업시수에 미치지 못하고 교과 내용은 다소 많은 편에 속하기 때문에 빨리 가르치는 것이 유행하고 있으며, 전형적인 강의식 · 주입식 교육이 주를 이루고 있는 상황이다. 수학과 교육과정 내용의 변화나 양의 변화가 우리나라 수학과 교육과정의 운영 방식(평가나 교실 수업, 학습한 내용을 정의하고 정의를 기반으로 정리를 찾는 과정에 대한 이해부족)에 대한 변화로 이어질 가능성이 있을까? (교사의 정신교육이 급선무, 이를 교과서 개발과정에서 교사용 자료로 녹여야 할 듯)

– 현 수능 및 논술 중심의 경쟁적 입시 환경에서 수학과 평가 방식에 대한 바람직한 개선책이나 대안이 마련될 수 있을까? 평가의 개선을 위해선 무엇이 먼저 고려되어야 할까?

– 수능에서의 평가 방법이나 평가 범위에 대한 이견으로 고민하는 국내 수학교육의 문제를 한 번에 조정하는 바른 길은 경쟁적 사고의 원천인 수능의 폐지라 할 수 있다. 왜 우리나라의 석학들은 수능의 폐지를 고민하지 않고 유지시키려할까? 학습량으로 인한 학생부담 또한 줄일 수 있을까?

– 다음 표와 같이 기초과목 중심의 수능 시험 영역 축소 및 대안 마련은 현 입시교육의 문제를 해결할 진정 바람직한 대안이나 학습량 경감의 바람직한 대안이 될 수 있을까? 사실 본인도 우리의 학습 환경에서 수능에 대한 대안으로 공통영역에서 출제하여 학습량을 경감하는 안을 좀 더 지지하게 고민한 적이 있다. 과연 이것이 우리 교육에서의 학습량 경량의 한 방법이라고 할 수 있을까? 교과서를 이렇게 줄여서 학습하는 것이 유리할까?

<table>
<tr><th></th><th>구분</th><th>문과 시험범위</th><th>이과 시험범위</th></tr>
<tr><td>수학 I</td><td>문이과 공통</td><td>필수</td><td>필수</td></tr>
<tr><td>수학 II</td><td>문이과 공통</td><td>필수</td><td>필수</td></tr>
<tr><td>미적분 I</td><td>문이과 공통</td><td rowspan="2">선택1</td><td>필수</td></tr>
<tr><td>확률과 통계</td><td>문이과 공통</td><td rowspan="3">선택1</td></tr>
<tr><td>미적분 II</td><td>이과</td><td>X</td></tr>
<tr><td>기하와 벡터</td><td>이과</td><td>X</td></tr>
</table>

– 문제의 대안으로 바람직한 대안이 될 수 있을까? 교실 평가의 개선이 우선시 되어야 하고 이를 기반으로 평가 방법의 개선이 시급하다.

– 경쟁적 수능을 폐지하든 절대평가를 도입하여 수능에 대한 사회적 부담을 줄이든 어떤 방법으로든 입시의 중심에 있는 수능과 입시에 관련된 평가방법의 개선은 불가피하다.

「6개국 수학 교육과정 국제비교 컨퍼런스」 논찬

유재봉(성균관대학교 교육학과 교수)

‘사교육걱정없는세상’이 개최하는 『수학 교과서 6개국 국제비교 컨퍼런스』에 종합세션에 논찬하게 되어 영광스럽게 생각합니다. 처음에 ‘사교육걱정없는세상’의 대표로부터 토론자로 제안 받았을 때 이 날을 제외한 스케줄이 꽉 차있을 뿐만 아니라 수학교육 전문가도 아니어서 부담스러워 사양하였고, 그에 관해 해박한 지식을 가진 훌륭한 분을 찾아보시고 정 찾지 못하면 제가 하겠다고 하였습니다. 계속되는 권유와 함께 두 가지 이유 때문에 어정쩡하게 그 제안을 수용한 셈이 되었습니다. 하나는 제 자신이 외국의 수학수업 현장을 관찰한 적이 있으며, 저의 자녀들이 외국의 초중고의 교육과정을 부분적으로나마 이수한 학부모의 입장에서 그 경험을 공유할 수 있으리라는 생각 때문이고, 다른 하나는 교육(철)학자로서 수학(교육)자들과 수학교육의 가치와 문제에 대해서 소통하고 배우는 것이 중요하다고 생각하였기 때문입니다. 한동안 아무런 연락이 없기에 안심하고 있다가, 갑작스런 컨퍼런스 안내문과 154쪽에 이르는 방대한 컨퍼런스 자료집을 보고 후회하였습니다. 저는 단순히 두어 시간에 걸쳐서 하는 소논문에 대한 간단한 논평으로 생각하였기 때문입니다. 한정된 짧은 시간 안에 자료집을 모두 읽고 제대로 된 논평을 하는 것이 불가능하다고 판단하여, 여기서는 자료집 ‘III장 한국 수학교육에 대한 제언’을 중심으로 제가 가진 한국 수학교육에 대한 몇 가지 단상을 제시한 뒤 저의 입장을 제시하겠습니다.

먼저, 이 컨퍼런스의 개최 의도와 관련된 저의 생각입니다. 이 컨퍼런스를 개최하게 된 것은 우리나라에서 수학교육 내용이 지나치게 어렵고 내용이 방대하여 많은 사교육을 유발하게 되는 것은 물론이고, 나아가 수학교과에 대해 흥미를 잃고 수학을 포기하는 학생(소위 ‘수포자’)을 양산하고 있다는 심각한 문제의식에서 비롯된 것으로 보입니다. 이 문제는 교육계에 종사하는 사람으로서 안타까운 일이며, 우리 사회 구성원 모두가 함께 느껴야 할 통증이고, 또한 책임의식을 가지고 반드시 해결해 가야할 문제입니다. 실지로 우리나라에서 수학의 사교육 참여율(45.8%, 중학교는 57.9%)이 가장 높으며, 수학의 학생 1인당 사교육비 지출도

가장 많을 뿐만 아니라 지속적으로 증가하는 추세입니다(12년 통계청 사교육 실태조사에 의하면, 학생 1인당 수학 사교육비는 '09년 6.7만원, '10년 6.8만원, '11년 7만원, '12년 7.5만원). 사교육 참여율과 사교육비 지출액은 부모의 소득과 학력수준, 그리고 학생의 성적과 정적 상관이 있는 것으로 나타나고 있습니다(사교육정책중점연구소 2014년 연구보고서, 수시과제3-수학 사교육 현황 및 추이). 이 점에서 수학은 사교육을 일으키는 핵심 교과이며, 따라서 사교육에 관한 한 주 타깃이 되는 듯합니다. 우리나라에서 사교육은 '모두를 위한 교육(education for all)'의 이상에 역행한다는 점에서 교육정의(educational justice)에 어긋나며, 공교육을 정상화지 못하게 할 뿐만 아니라 파행으로 이끈다는 점에서도 문제가 있습니다. 그러므로 모든 교육정책이 사교육을 유발하는지의 여부에 따라 결정될 수도 없고 그렇게 결정되는 것이 바람직하지 않지만, 사교육에 일반화되어 있어 교육에서 여러 부작용을 일으키는 우리나라의 현 상황에서 이 문제를 고려할 수밖에 없습니다. 그렇다고 해서 제가 우리나라가 '사교육이 전혀 없는 세상'이 가능하다고 믿지는 않습니다. 제가 소망하는 것은 사교육이 다소 있더라도 적어도 '사교육을 걱정하지 않는 세상'이 되었으면 합니다.

수학의 사교육 참여율이나 1인당 사교육비 지출이 높은 것보다 더 심각한 문제는 대부분의 학생이 수학 교과를 즐기기보다는 그것에 대해 압박을 느끼고 있거나 흥미를 잃게 되고 급기야 상당수의 학생이 수학을 포기하는 사태에 이르는 현상입니다. 수포자 현상이 우리나라 학생들이 배우는 수학 내용이 지나치게 많고 어렵고, 주입식과 문제풀이식 때문인지에 대해서는 이견이 존재할 수 있습니다. 이 보고서는 우리나라 수학교육의 양이 외국에 비해 지나치게 많고 어렵다는 세간의 인식과 그렇지 않다는 수학계의 주장을 객관적인 근거를 통해 검증하기 위한 것입니다. 40여명의 교사들이 2013년부터 2년에 걸쳐 6개국(미국, 영국, 일본, 싱가포르, 핀란드, 독일)의 수학교과서를 수학의 양(과 내용)에 초점을 두어 비교 분석하였습니다. 학교일만으로도 바쁘신 선생님들께서 학회나 국책기관에서도 연구되어 있지 않는 것을 조사하는 엄청난 열정과 노력에 경의와 감사를 표합니다. 보고서에 따르면, 전반적으로 6개국에 비해 우리나라 초중등 학교의 수학교육 내용이 많으며, 배우는 시기도 빠르다는 것입니다. 배우는 시기가 빠르다는 것은 대체로 수준이 높거나 어렵다는 것을 의미합니다. 물론 국가의 상황에 따라 배우는 시기가 다를 수 있고, 수준이 다를 수도 있습니다. 정작 중요한 문제는 수학 교육을 통해 학생이 수학의 가치를 구현하거나 내면화 하도록 하는 것, 그리고 모든 학생이 수학공부에 소외되지 않고 적절한 수학교육을 받도록 하는 것입니다.

다음으로, 이 보고서에 나타난 한국 수학교육에 대한 5가지 제언 중 수학교육과 직접적으로 관련된 3가지 제언, 즉 수능시험, 수학 교육과정, 수학교과서에 대해서 영국에서의 경험과 저의 생각을 간단히 덧붙이고자 합니다.

첫째, 수능시험과 관련하여, 이 보고서는 수학의 수능시험이 범위가 과다하게 넓어 특히 이과의 경우 파행적 운영을 할 수밖에 없다는 점, 일부 대학에서는 인문계 논술전형에 수학문제가 출제되거나 수학과 관련 없는 모집단위에 수학을 필수로 하거나 지나치게 높은 등급을 요구하는 한다는 점, 상대평가로 인해 성취기준의 달성보다는 경쟁에서 이기는 데 관심을 둠으로써 비교육적 문제점 등이 발생하고 있다고 지적하고 있습니다. 이러한 문제를 해결하기 위해 수학시험 범위를 축소하고, 전공계열에 따라 필수과목과 선택과목으로 분리하며, 수능시험도 절대평가로 바꾸는 방안을 제시하고 있습니다.

둘째, 수학 교육과정과 관련하여, 이 보고서는 모든 고등학생에게 미적분을 필수로 하고 있다는 점, 낮은 흥미도와 자아효능감 등 정의적 영역의 성취가 낮다는 점, 지나치게 지식중심의 내용, 교육과정 구성방식이 단선형구조를 취하고 있다는 점 등의 문제점을 지적하고 있습니다. 이러한 문제를 해결하기 위해, 미적분을 이공계(혹은 경상계-경제수학) 에 한정하고, 정의적 성취를 높이기 위해 학습내용을 축소하고, 지식보다는 사고력 중심의 교육으로 전환하며, 교육과정을 단선형보다는 나선형구조로 바꿀 것을 제안하고 있습니다.

셋째, 교과서가 목표중심 모형을 취하고 있다는 점, 수학의 제 영역이 분리된 채 구성되어 있다는 점, 낮은 수준의 사고를 할 수밖에 없는 문제로 구성되어 있다는 점을 지적하고 있습니다. 이러한 문제를 해결하기 위해, 교과서를 자기주도적 학습이 가능하도록 구성하고, 분리된 영역을 최대한 통합하며, 고등사고력을 기르는 것이 가능하도록 구성할 것을 제안하고 있습니다.

이러한 문제점과 제안에 대해 저는 대체로 동의하는 편입니다. 특히 수학적 사고나 일상의 삶과 무관한 수학 교육내용 및 시험문제, 수능이나 대학입시에서의 수학의 강요, 수학 시험 평가에서의 타당도를 제고하는 문제 및 상대평가에 따른 문제, 수학의 교육과정이 수학교육의 목적보다는 주어진 목표를 달성하는데 급급하다는 점, 수학내용의 과다와 수준의 높음으로 인하여 수학적 형식 혹은 사고를 내면화하기 어렵다는 점 등입니다. (영국에서의 몇 가지 에피소드: 1. 고등학교에서의 통지문-청소년의 건강한 수면시간 9시간, 2. 고등학교 수학교과서의 어우딩보디 미리 알려달라는 것에 대한 학교의 대답 3. 초등과 중등학교에서의 수학심화 4. 수학에 선입견 변화). 이러한 문제를 해결해 가는 것이 시급하다고 생각합니다. 그리고 이러한 문제들은 개인이나 학계의 이해관계나 정치적으로 해결하기보다는 교육적인 관점에서 해결해가야 할 것입니다. 예컨대, '2015 개정 수학과 교육과정'에서 20% 수학내용을 줄이는 문제를 생각해보면, 이 문제를 합리적이면서 교육적으로 해결하는 것이 수학(교육)자의 입장에서 쉽지 않을 것입니다. 그들이 보기에, 모든 영역의 내용이 중요하지 않은 것이

없으며, 수학의 세부 전공 교수들이 자신의 전공 영역의 내용을 줄이거나 없애는 것은 존재의 근거를 위태롭게 한다고 생각되기 때문입니다. 그 결과 첨예한 이해관계 대립 때문에 결국 줄이지 못하거나, 기껏해야 동일 비율로 줄이는 방안일 것입니다. 아닌 게 아니라, 지난 공개토론회 때 20%를 줄이는 데 실패하고 오히려 일부 늘어났다는 지적이 있었습니다. 선진 사회가 되려면 국민의 의식수준이 높아져야 하고, 그 점에서 약속을 지키려는 노력은 중요합니다. 그것보다 제가 수학(교육)자에게 말하고 싶은 것은 수학도의 이해관계보다는 공부하는 학생의 유익의 입장에서, 그리고 수학의 각 영역에 집중하기보다는 전체적인 관점에서 수학을 가르치는 목적이 무엇이고, 그러한 목적을 실현하기 위한 수학의 핵심아이디어와 원리가 무엇인지를 찾는데 좀 더 노력을 기울여 달라는 것입니다. 그러면 모르긴 해도 이러한 문제의 해결이 다소 용이할 것입니다.

마지막으로, 수학 교육과정과 관련하여 제가 가지고 있는 입장을 제시하겠습니다. 이러한 저의 입장은 앞에서 부분적으로 언급한 것을 논리에 따라 종합적으로 제시하는 것이기도 하고, 다른 한편으로 수학 교육과정의 논의에서 반드시 제기되어야 하는 근본적인 질문이지만 흔히 간과하는 것이기도 합니다. 그것은 다름 아닌 수학교육의 목적 혹은 가치와 관련된 것입니다. 제가 보기에, 우리나라 수학 교육과정을 논의하는 과정에 수학교육의 목적이나 가치에 관한 문제가 심각하게 고려하지 않거나 간과되어 있습니다. 우리가 수학을 가르친다고 할 때, 무엇보다 먼저 수학교육의 목적이 무엇인지에 대한 치열한 고민이 있어야 하고, 그러면 수학 교육과정을 둘러싼 많은 문제들이 상당부분 해소될 수 있을 것이라고 생각됩니다. 수학교육의 목적은 일반적으로는 ‘학교에서 수학을 왜 가르쳐야 하는가?’, 그리고 보다 구체적으로는 ‘왜 미적분을 가르쳐야 하는가?’의 질문에 대한 대답입니다. 전자가 학생들이 반드시 습득해야 할 수학(국어나 역사가 아닌)의 가치를 묻는 것이라면, 후자는 학생들이 수학 내용 중에서 반드시 미적분(삼각함수나 방정식이 아닌)을 학습해야 하는 이유를 묻는 것입니다. 전자가 여러 교과 중의 수학의 위치를 드러내는 것이라면, 후자는 수학내용 중의 특정 내용의 위치를 드러내는 것입니다.

지금까지 수학교육의 가치에 관한 주장은 전통에 의지해 오거나 ‘형식도야이론’(formal discipline theory)에 근거하고 있다. 수학이 왜 중요한가에 대한 일반적인 대답은 플라톤의 아카데미아 현판에 ‘기하학을 모르는 자는 들어오지 말라’고 써 놓을 정도로, 수학은 고대 그리스 시대부터 현대에 이르기까지 중요한 교과였다는 것입니다. 그러나 수학이 어째서 가치 있는 교과인가는 별도의 해답이 필요하며, 그에 대한 하나의 대답이 수학은 도야 가치가 큰 교과라는 형식도야이론에 입각한 대답입니다. 형식도야이론은 인간의 정신은 몇 가지 구분되는 능력들, 지각, 기억, 상상, 추리, 감정, 의지가 있으며, 교과의 중요성은 내용 그 차

제보다는 그 내용이 담고 있는 형식 때문에 인정됩니다. 수학이 도야 가치가 있다는 것은 무엇을 기억하고 추리하는가가 문제가 아니라, 그 '내용'에 관계없이 그것을 기억하고 추리한다는 사실이 중요합니다. 형식도야이론은 또한 교육방법을 드러내어 줍니다. 그 방법은 다름 아닌 특정 교과가 가지고 있는 능력들을 반복적으로 연습하는 것입니다. 반복적 연습을 통해 그 능력이 전이된다는 것입니다. 이와 유사하게, 수학교육의 가치를 주장하는 사람들이 흔히 취하는 방식은 수학을 통해서 어떤 종류의 논리적 · 합리적 능력이나 문제해결력도 기를 수 있으며, 반복적인 문제풀이식 수업을 통해 그러한 능력을 기를 수 있고, 또한 전이가 잘 이루어질 수 있다는 것입니다. 이러한 주장은 수학 가치의 근거를 형식도야이론에 두고 있습니다. 그러나 수학을 통해 도야되는 능력들은 구체적인 내용과 무관한 일반적인 능력으로, 그것이 획득되고 나면 어떤 내용에도 적용될 수 있다는 생각은 잘못된 것입니다. 수학적 논리성, 합리성, 문제해결력은 일상생활의 그것과는 다르기 때문입니다. 형식도야이론은 제임스의 전이실험이나 손다이크의 전이실험에서 이미 부정된 바 있으며, 듀이는 능력심리학이 전제하고 있는 마음관이 교과와 능력을 분리시킨다고 비판하였습니다. 듀이에 따르면, 교육에서 중요한 것은 지력을 필요로 하는 문제 상황에서 지력을 적절하게 선택적으로 활용하는 능력, 즉 사고하는 능력을 계발하는 것입니다. 만일 현행 수학교육의 가치가 형식도야이론에 토대를 두고 있다는 저의 판단이 정확하다면, 절대적 위치에 있는 수학의 가치는 약화될 수밖에 없으며 현행 수학 교육과정은 형식도야이론의 오류에 해당하는 만큼 문제를 지니고 있다고 보아야 합니다.

그러면 수학의 가치는 완전 부정된 것입니까? 형식도야이론에 토대를 두고 있는 수학의 가치가 부정되었지만, 수학의 가치는 여전히 있다고 볼 수 있습니다. 그 토대는 두 가지, 즉 '지식의 형식'(forms of knowledge)과 '사회적 실제'(social practices) 입니다. 두 이론은 교육에서 추구해야 할 '좋은 삶' 혹은 '잘 삶'(the good life or well-being)을 무엇으로 보는가가 다소 상이합니다. 전자가 합리적 마음의 계발을 강조한다면, 후자는 인간의 전반적 욕구 충족을 강조합니다. 그에 따라 교육에서 가르쳐야 할 내용과 방법도 달라집니다.

지식의 형식은 인류문화 유산의 추상이면서 인간의 삶 혹은 경험을 이해하는 복잡한 형식입니다. 허스트에 따르면, 학생들이 반드시 입문해야 할 지식의 형식은 일곱 내지 여덟 가지, 즉 수학, 자연과학, 인문학, 종교, 문학 및 순수예술, 철학, 도덕으로 구성됩니다(Hirst, 1965: 123). 각각의 지식의 형식은 다른 지식의 형식들과 구분 짓는 독특한 언어, 논리, 검증방식을 가지고 있으며, 각각의 지식의 형식은 다른 지식의 형식들로 환원되지 않습니다. 지식의 형식 이론에 따르면, 수학교과의 가치는 수학적 지식의 형식을 공부함으로써 수학이 가지고 있는 고유한 수학적 사고 혹은 안목을 길러주는 데 있습니다. 그러므로 합리적 마

음이나 수학적 사고를 길러주지 못한 채 문제풀이를 잘하는 것은 수학교과의 가치와 무관한 것입니다. 그리고 수학은 지식의 형식이라는 점에서 합리적 마음을 구성하는 중요한 교과이지만, 자연과학이나 인문학 등의 다른 지식의 형식보다 상위의 가치를 가진 교과는 아니라는 점입니다.

사회적 실제는 좋은 삶을 영위하기 위한 '모종의 만족이나 목적'의 달성과 관련된 활동양식으로서, 지식, 신념, 판단, 성공의 준거, 원리, 기술, 성향, 감정 등 인지적(cognitive), 정서적(affective), 행동적(conative) 측면을 포괄하면서 서로 긴밀하게 관련되어 있는 요소들의 복합체입니다. 좋은 삶을 영위한다는 것은 각 개인이 다양한 욕구를 충족시킴으로써 삶의 총체적 측면을 발달시키는 것을 의미하며, 사회적 실제는 그러한 총체적 삶을 이루는 요소들의 복합체입니다. 학생들이 입문해야 할 사회적 실제에는 기본적 실제, 선택적 실제, 이차적 실제가 있습니다. '기본적 실제'(basic practices)는 누구나 일상적 삶을 살아가는 데 반드시 필요한 실제로서, 여기에는 여섯 가지 영역, 즉 '물리적 세계'에 대처하는 것과 관련된 실제, '의사소통'과 관련된 실제, '개인과 가정생활'의 관계성과 관련된 실제, '광범위한 사회적 실제', '예술과 디자인'에 관련된 실제, 그리고 '종교적인 신념과 근본적인 가치'에 관련된 실제가 포함됩니다(1993b: 35). '선택적 실제'(optional practices)는 각 개인이 합리적인 삶을 구성하는 데 필요한 실제입니다. '이차적인 실제'(second order practices)는 기본적 실제와 선택적 실제에 대한 비판적 반성과 관련된 실제입니다(Hirst, 1993a: 196). 사회적 실제 이론에 따르면, 인간의 전반적 욕구를 장기적 관점에서 최대한 충족시킬 때 수학교과의 가치가 드러납니다. 그러므로 수학교육을 받은 결과 실지로 각 개인의 삶을 풍성하게 하는 데 하등 유익이 없다면 수학을 가르치는 의미가 없어집니다. 각 개인의 삶 전반을 풍요롭게 하는 데에는 기본적 실제로서의 수학내용이 포함되어야 합니다. 그러나 모두에게 고차적인 수학이 요구되는 것은 아니며, 그것은 수학과 관련된 삶을 영위하는 사람에게는 선택적 실제로서 중요하게 취급될 것입니다.

요컨대, 수학의 가치는 수학적 사고를 길러주거나 실지의 삶을 풍성하게 하는 데 있습니다. 이러한 가치는 잡다한 수학적 지식을 많이 그리고 어렵게 가르친다고 길러지는 것이 결코 아니며, 이 경우 오히려 진도 나가기에 급급하여 주입식이나 문제풀이식 수업으로 치닫게 되어 그러한 가치를 구현하는 데 방해가 될 것입니다. 오히려, 수학교과의 가치가 잘 드러나게 하려면 수학의 구조에 해당하는 수학의 핵심 아이디어나 기본 원리를 충분히 내면화 할 수 있도록 가르치거나 실지의 삶과 관련하여 가르쳐야 할 것입니다. 저의 자녀의 경험에 비추어 말하면, 영국의 수학 수업은 실생활과 관련된 수학 내용을 학생들끼리 토론하면서 해결하게 한 뒤, 선생님께서 그것의 수학적 개념과 원리에 대해 한 시간 정도 할애 하여(어려운

주제나 문제는 여러 시간 할애) 가르치며, 그와 관련된 문제풀이는 몇 문제만 선택하여 학생이 해오도록 하는 방식을 취합니다. 수학을 실생활과 관련하여 공부하기 때문에 흥미를 유발하며, 교사가 기본원리를 상세하게 설명해 주기 때문에 문제를 푸는 데 저의 자녀들은 별 어려움을 느끼지 못하였습니다.

저는 수학 교육의 상당한 문제가 수학교육의 목적을 명확히 인식함으로써 논쟁의 상당한 부분을 해소할 수 있다고 말한 셈입니다. 수학 교육과정을 입안하거나 개정하는 사람은 부단히 수학을 왜 가르쳐야 하는지를 질문하여 수학교육의 가치를 명료하게 드러내어야 합니다. 수학교육의 가치가 명료해지면, 그러한 가치를 구현할 수 있는 교육내용, 즉 수학교과의 핵심 아이디어를 논리적 · 심리적 순서에 따라 나선형으로 제시합니다. 그러면 무조건 교과의 내용을 많이 넣으려는 유혹도 사라지고, 수학공부의 어려움을 상당히 해소할 수 있을 것입니다. 물론 어느 나라에서나 또 학교에서 아무리 잘 가르쳐도 수학에 흥미가 없거나 수학공부를 포기하는 사람이 학생이 존재할 수 있습니다. 교육자로서 우리는 그런 사태가 최소화되도록 혼신의 노력을 다해야 할 것입니다. 교육자에게 학생은 누구하나 소중하지 않은 사람이 없으며, 수학 교과를 공부하지 않음으로써 그 학생은 온전한 합리성을 갖추거나 풍성한 삶을 영위하는 데 제약이 있는 상태를 바라보아야 아픔이 있기 때문입니다.

「6개국 수학 교육과정 종합 비교 분석 및 한국 수학 교육에 대한 제언」에 대한 논찬

서화숙(언론인)

각론 세션 논찬

33분의 연구진에게 고합니다.

박제남(인하대학교 수학교육학과 교수)

최수일 선생님께서 “영역 통합 지도 방식에 대한 제안”을 읽고 의견을 달라는 연락을 받았습니다. 김보현 선생님이 연구하시고 발표하신 중 · 고등학교수학에서 “영역 통합 지도 방식”은 주제 간의 관계 등을 연결하여 지도할 수 있고 그 결과 내용을 줄일 수 있다는데 대한 매우 원론적인 것이기 때문에 그와 같은 시도에 대한 반론은 없으며 오히려 더 큰 틀에서 학습량 감축을 제안할 것입니다.

해당 내용을 읽다가 전체를 숙독하게 되었습니다. 여러분과 마찬가지로 저 또한 최근 3년 동안 우리나라 초 · 중등 모든 출판사의 수학 교과서와 몇 몇 대학의 이 · 공계 교육과정을 공부하고, 그리고 하고 싶은 이야기를 4편의 논문으로 만들었습니다.[1] 전체 분량은 여러분이 쓴 보고서의 글자크기로 환산하면 약 140쪽 정도 됩니다. 본 연구보고서에서는 교육과정이외에 수리논술(160쪽–161쪽), 영재교육(86쪽–102쪽)과 공학도구 사용(135쪽–148쪽)을 다루는데 08학년도 수리논술의 도입과 제가 13년째 계속해 오고 있는 영재교육이나 미국(University of Tennessee, Knoxville)에서 TI계산기와 Maple을 가지고 미적분과 선형대수를 2년간 강의한 경험 등을 고려하면 본 컨퍼런스에서 제가 공부하고 경험한 내용을 바탕으로 전체적인 의견을 이 자리에서 연구진분들에게 말씀드릴 자격이 있다고 생각합니다.

● ‘수학’의 정의를 생각해 보셨나요?

수학은 무엇이고 무엇을 하는 것인가? 연구보고서 어디에도 수학교육학에서 말하는 ‘수학’의 정의는 없고, 또한 “수학은 무엇을 하는가?”에 대한 언급도 없습니다. 물론 도처에서 “실생활 수학”이란 용어를 사용하고 있지만 앞에서 한 질문과는 거리가 있습니다. “총론”이 있

1) 박제남. (2014). 황금비와 수학교육 담론, 한국수학교육학회지 시리즈 E 28(2), 281–302.
박제남 · 장동숙. (2014). 미분방정식 지도에 대한 소고, 한국수학교육학회지 시리즈 E 28(3), 339–352.
박제남. (2014). 초등학교 수학 교과서가 다루는 수학사의 보완 방안, 한국수학교육학회지 시리즈 E 28(4), 493–511.
박제남 · 장동숙. (2015). 중등 수학교과서가 다루는 수학사의 비판과 대안, 한국수학교육학회지 시리즈 E 29(2), 157–196

으니 생각할 필요가 없다고 느끼실 수도 있습니다.
여러 나라 수학 교과서를 연구하시면서 그 나라 수학교육에는 "총론"이 있던가요? 미국의 경우 수학교과에 총론이 없습니다. 따라서 우리나라 교과서를 미국 등의 교과서와 횡이나 종으로 비교하려면 우리나 그들이 '수학의 정의'를 무엇으로 하는지 먼저 알아보아야 합니다.
수학은 무엇이고 무엇을 하는 것인가요? 미국의 예를 들면, 먼저, 수학은 패턴과 순서의 과학입니다(Mathematics is a science of pattern and order)[2]. 산술학과 정수론은 수와 셈의 패턴을 연구하는 것이고 기하학은 모양의 패턴을 연구합니다. 또한, 미적분학은 운동의 패턴을 다룰 수 있게 하며 확률은 우연의 패턴을 다룹니다[3]. 그리고 수학은 비가시적인 것을 가시화합니다. 예를 들어, 비행기가 뜨는 것을 보기 위해서는 수학이 필요하며 사과를 공중에 놓으면 땅으로 떨어진다는 중력의 과학 원리를 알 수 있게 하는 것이 바로 수학입니다.

● 보고 싶은 것만 보고 연구 보고서를 쓰시지 않으셨나요?

33분의 연구진은 외국의 교과서를 초등학교와 중학교로 나누어 양과 배우는 시기를 "내용 비교표"로 만들고 우리나라 교과서는 양이 많고 내용을 일찍 가르친다는 것을 보고서의 담았지만 이미 알고 있는 내용들을 확인한 것입니다.
연구진은 초등학교과 중학교 수학 교육과정으로 제한된 "내용 비교표"를 바탕으로 수학의 학습 양을 줄여야하고 이어서 수학능력시험의 과목 수를 줄이고[4] 절대평가로 하여 논술을 폐지[5]하며, 따라서 최종적으로는 사교육을 줄일 수 있다고 주장[6]하고 있습니다.
그러나 제가 보기에는 본 연구를 시작하기 전에 이미 결론을 설정하셨다고 생각합니다. 즉, 보고 싶은 것만 보고 연구보고서를 섰다는 것입니다. 또한 교육과정과 교과서가 바뀌어야하고, 교수법, 그리고 평가가 바뀌어야한다고 주장합니다. 연구진들께서 외국의 초등학교와 중학교의 "내용 비교표"를 출발로 이와 같은 주장을 펼친다는 것은 저로서 이를 순수한 연구 형태로 받아드리기에는 어려움이 따릅니다.
33분의 연구진은 처음부터 대학의 수학 관련 교육과정을 연구대상에서 제외하였고 고등학교 교육과정의 비교는 각 나라의 사회적 배경과 관련된 교과목의 "선택"이 변수로 나타나므

2) National Research Council. (1989). Everybody counts. Washington.
3) Devlin. K. (2011). 수학의 언어(전대호 옮김). 해나무.
4) 연구보고서 40쪽 "라. 수능 수학 시험 개선방안" 참고.
5) 연구보고서 153쪽 상단 부분 참고
6) 물론 연구보고서 31쪽에서는 " 우리는 사교육에 대한 대책을 말하고자 하는 것이 아닙니다."로 쓰고 있다.

로 이 또한 제외하셨습니다. 따라서 33분의 연구진은 초등학교와 중학교의 수학 교육과정 안에서 국가 간 일대일 비교를 연구의 출발로 했지만 일부 연구진들은 이를 바탕으로 무엇을 도출할 수 있을지 의구심을 가지고 있었을 것이라 판단합니다. 더 나아가 연구진 중에는 연구방법론에 회의를 가진 분도 있었을 거라고 생각합니다.

● '수학과 교육과정'을 '이 · 공계대학의 수학 관련 교육과정'과 연결해 보셨나요?

수학이란 무엇인가가 정의되고 그 정의된 수학을 "어떤 내용으로 가르칠 것인가"가 교육과정이며 교육과정의 실체가 교과서입니다. 내용은 "모양(Geometry)"과 "셈(Arithmetics)"으로 집약됩니다.
초등학교 교육과정, 중 · 고등학교 교육과정, 그리고 이 · 공계 수학 관련 대학 교육과정을 모두를 연구대상으로 하는 것이 바람직합니다. 따라서 핀란드, 미국 등과의 교육과정이나 교과서를 비교할 때는 대학의 수학 관련 교육과정을 포함한 모든 수학교육과정을 대상으로해야합니다. 그 모두가 하나로 국가 교육체계 내에서 유기적으로 움직이고 있기 때문입니다. 전 세계적으로 공대교육과정이 표준화되어 있기 때문에 이와 같은 연구방법은 가능합니다. 또한, 33분의 연구진이 공부할 내용을 서로 분리하여 교육과정을 연구하는 것이 아니라 연구진 모두가 초등부터 대학 교육과정까지 전체를 함께 연구해야합니다. 결론적으로 고교 교육이나 대학 교육과 관련된 그 나라별 특수성을 반영하지 않고 초등학교와 중학교 교육과정만을 비교하여 어떤 대안을 제시한다는 것은 매우 위험하며 결과적으로 적합한 대안이나 논리를 기대하기가 어렵습니다. 연구보고서 61쪽([그림 III-5])은 대학 이공계 교육과정이 아니라 수학과 교육과정입니다.
다음은 전 세계 기계 및 전기공학 관련 학과의 2학년까지의 수학 관련 표준 교육과정을 내용중심으로 꾸며본 것입니다. 학습내용과 성취기준이 전 세계 대학이 같으므로 이와 같은 접근법은 의미가 있습니다.
초등학교 3~4학년군에서 다루는 자연수의 사칙연산에서 고등학교《미적분 II》에서 다루는 지수, 삼각함수의 미적분까지의 내용이 한눈에 나타납니다.

【표 1】 국내외 기계 · 전기계열 학과의 핵심 교육과정과 우리나라 초중등 교육과정

한국공학교육인증원 (ABEEK : Accreditation Board for Engineering Education of Korea)			
Mechanical Model 과 Electrical Model			
⇩ ⇩ ⇩	Modeling $my' + cy' + ky = r(t)$ $LI' + RI + \frac{1}{C}\int I(t)\,dt = E(t)$ 해 $y(t) = e^{-10t} + e^{-100t} - 2.17\cos\sqrt{3}\,t + 0.796\sin\sqrt{3}\,t$ 와 그 해석	• 공학수학[1)]1, 2, • 선형대수학, • 미분적분학1, 2 • 확률과 통계 • 수치해석 (총21학점)	대학교 교육과정 **인증구분** (인증필수)
⇧	지수함수, 로그함수, 삼각함수, 그의 미적분	미적분 II	고등학교 교육과정
⇧	수열의 극한, 미분과 적분의 정의	미적분 I	
	함수, 지수, 로그의 정의, 수열의 합	수학II	
⇧	복소수, 다항식의 연산, 방정식과 함수	수학I	
	실수, 이차함수, 삼각비,	수학③	중학교 교육과정
⇧	유리수, 단항식, 다항식, 일차함수, 삼각형의 성질	수학②	
	정수, 유리수의 사칙계산, 일차방정식, 함수	수학①	
⇧	분수의 사칙계산, 비와 비율	초등5~6학년군	초등학교 교육과정
⇧	분수와 소수의 덧셈과 뺄셈, 자연수의 혼합계산	초등3~4학년군	

한편, 여러분들이 고등학교 교육과정을 “내용 비교표”에 넣을 수 없었던 것은 교과목의 선택 때문입니다. 본 문제를 어떻게 접근해야할까요?

실제 예를 들어 설명하겠습니다. 두 고등학생 A, B가 Tennessee대 공대를 입학했을 때, 수학 관련 수강신청은 A는 Basic algebra(3학점), PreCalculus(3학점), Calculus I(3학점), Calculus II(3학점), Calculus III(3학점)를 모두 15학점을 듣지만, B학생은 입학과 함께 Calculus III(3학점)를 듣고 공학관련 과목을 수강할 수 있습니다. 즉, 고등학교 교육과정은 대학 교육과정과 연결하여 판단하면 됩니다. 이는 고등학교의 교육과정을 위하여 대학의 역할이 얼마나 중요한가를 보여주는 것이며, 결론적으로 고교에서 수학의 선택은 학생 자신과 그 학생의 입학을 허락한 대학이 공동의 책임을 진다는 것입니다.

7) 공학수학의 교육과정과 교육내용은 전 세계적으로 동일화 되어 있으며 교재는 주로 다음과 같습니다.

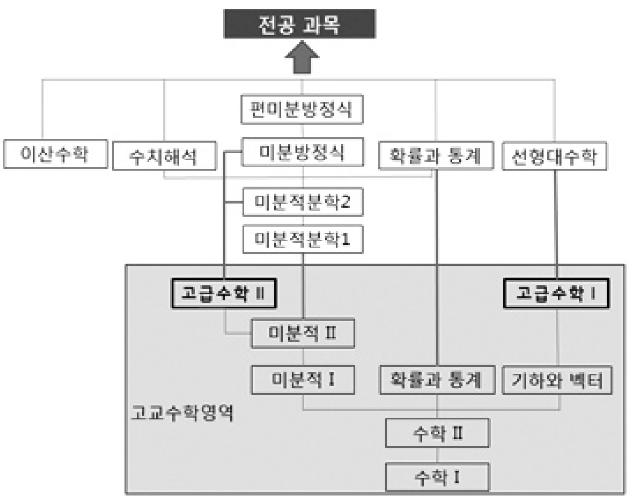
【표 2】 국내 이공계대학과 미국 이공계대학 수학 관련 교과목 비교

국내 이공계대학 주요교과목		미국 이공계대학 주요교과목		
-	-	Basic Algebra	1학기	AP과목
기초수학	1학기	PreCalculus	1학기	AP과목
미분적분학 1,2	2학기	Calculus I, II, III	3학기	AP과목
		Honors Calculus I, II, III	3학기	
공학수학 1, 2	2학기	Engineering Mathematics	3학기	
선형대수학	1학기	Linear Algebra	1학기	
확률 및 통계	1학기	Probability and Statistics	1학기	
수치해석	1학기	Numerical Analysis	1학기	

• 고교 “기하와 벡터”, “확률과 통계”의 접근 방안

한편, 고교에서 제공하는《기하와 벡터》의 모든 내용은 대학 1학년 미분적분학에서 대략 90여 쪽 불량으로 다룹니다.[8] 대학 교재 90쪽은 기존 기하와 벡터 교제의 양과 질보다 훨씬 많은 것입니다. 대학은 다시 《기하와 벡터》의 내용을 선형대수에서 또 다룹니다. 고등학교 《확률과 통계》 역시 대학에서 개설합니다. 대학이 개설한 확률과 통계는 그 내용이 고교에서 확률과 통계를 배워야지만 수강할 수 있는 것이 아니라는 것입니다. 특히 공학인증의 경우 필수과목입니다. 따라서 통계는 학교수학에서 평균과 표준편차를 다루는 것만으로도 충분합니다.

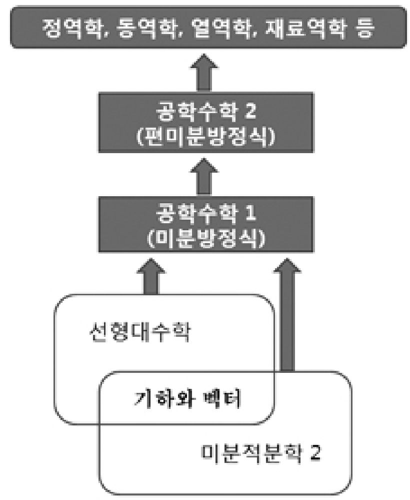
[그림 1] 고교 및 이공계 수학 관련 교육과정의 연계도



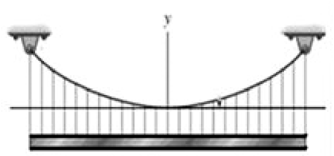
8) 우리니라 및 전 세계적으로 사용되고 있는 미적분학 교재는 3권 정도로 “J. Stewart, Calculus, 7th. ed., Brooks/Cole, 2012”를 참고하면 충분합니다. 결론적으로 미적분학의 교육과정과 교과서는 전 세계적으로 통일이 되어 있다고 말할 수 있습니다.

한마디로 고교 “기하와 벡터”의 내용은 대학에서 가르치는 것으로 다변수함수의 정의역을 위한 것입니다. 따라서 대학은 2학기에 미분적분학2에서 고교 내용을 그대로 모두 다 가르치고 벡터미적(Vector calculus)으로 미적분학을 마무리합니다. 이와 같은 기초위에 대학은 선형대수와 미분방정식을 제공하고 최종적으로 다변수 함수의 편미분방정식을 바탕으로 한 역학과목(정역학, 동역학, 유체역학, 재료역학 등)을 학생들에게 제공합니다. 그런데 선형대수에서도 고교에서 가르치는 “기하와 벡터”의 내용이 “유클리디안 공간과 내적”이란 주제로 대략 80쪽의 분량으로 또 나타납니다.

[그림 2] 공과대학 전공영역 흐름도



【표 3】 정역학에서 알아본 중등 · 대학 교육과정 연계의 예

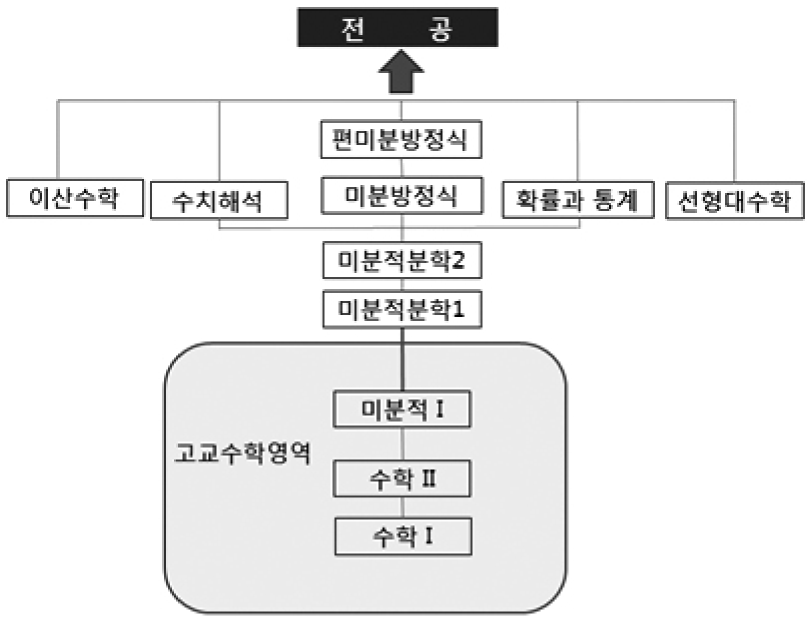
수 학 내 용		교과목명	구분
⇧ ⇧	Modeling  $y = \frac{\lvert T\rvert}{\rho}\cosh\left(\frac{\rho}{\lvert T\rvert}x\right) + a - \frac{\lvert T\rvert}{\rho}$, $y = \frac{w}{2\lvert T\rvert}x^2$	정역학[9] (Statics)	대학
⇧	$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho}{\lvert T\rvert}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{wx}{\lvert T\rvert}$	공학수학1 (미분방정식)	대학
	$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \sinh^{-1}u + C$	미분적분학1	대학
⇧	$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $y = \frac{e^x - e^x}{2}$ (지수함수)	수학II	고교
	$y = ax^2$ (이차함수)	수학I	고교
⇧	이차함수와 그래프, 제곱근과 실수	수학③	중학교
	유리수와 순환소수, 다항식의 계산	수학②	중학교
	정수와 유리수, 문자와 식, 함수	수학①	중학교
	분수, 소수의 사칙연산, 비와 비율	5~6학년군	초등학교
	분수와 소수의 덧셈과 뺄셈, 규칙과 대응	3~4학년군	초등학교

9) Meria, J. and Kraige, L. Engineering mechanics, 3rd ed., Wiley, 1993.

이와 같은 이유로 **고등학교에서 "기하와 벡터"와 "확률과 통계"를 대폭 축소하고 초월함수의 미적분을 다루는《미적분 II》를 교육과정에서 삭제해야합니다.** "미적분 I"은 개념의 교과이기 때문에 그 것으로 충분하며, 한편, "미적분 II"는 개념을 가르치는 것이 아니라 기교(미분법, 적분법)를 가르치는 과목으로 이를 대학에선 1학년 1학기 미적분 시간에 다룹니다. **"미적분 II"는 대학이 책임질 교과목입니다.**

고교 수학과 교육과정에서 "미적분 II"를 삭제한다고 할 때, 이에 반발하는 대학은 공대에서 미적분을 한 학기만 설강하는 대학이거나 "감히 우리 대학엘 ... "일 것입니다. 이와 같은 반발을 두려워할 필요는 전혀 없습니다. 공대 교수들이 역학관련 과목(정역학, 동역학, 유체역학, 재료역학 등)을 1, 2, 3학년에 주로 강의하기 위하여 편법을 쓴 것입니다. 고교에서 "기하와 벡터"와 "확률과 통계"를 대폭 축소하고 미적분 II를 삭제하면 대략 30%가 고교에서 줄고 그 여파가 중학교 그리고 초등학교 수학과 교육과정으로 연쇄적으로 영향을 미칩니다. 연구진 여러분 상상만 해도 즐겁지 않으십니까?

[그림 3] 고교 수학영역과 수능과목(안)



하나 더 흥미로운 예를 연구분들에게 소개하겠습니다. 공대에서 복소수는 너무 너무 중요합니다. 상상을 초월할 정도라고 표현해도 무리는 아닙니다. 제7차교육과정이 들어오면서 복소수는 사칙연산만을 다룹니다. 그 전에는 복소수의 극형식(즉, 복소지수함수)과 복소평면을 다루었습니다. 물론 이와 같은 분야는 공대생들에게는 필수입니다. 고교 교육과정은 복소수를 대폭 줄여도 문제가 안 되는 것은 공대 교육과정의 필요에 의하여《공학수학 2》에서

대략 170쪽 정도로 복소수를 광범위하게 제공하고 있기 때문입니다. 그것은 실수에서의 미적분은 계산상의 한계가 있기 때문에 복소수에서 역학관련 미적분을 계산해야합니다.
연구진 여러분! 현《고급수학 II》에 있는 "복소수와 극좌표"는 제7차 교육과정 이전에 일반 교과서[10)]에서 다루던 것입니다. 고교에서 복소수를 대폭 줄였다고 해서 지금 문제가 발생되고 있나요? 1995년에 발행된 교과서를 보시면 깜짝 놀라실 겁니다.

• 이과 구분이 필요 없습니다.
고교 이과와 공과대학의 중복된 수학관련 교육과정을 고려하여 제안하면 고교 수학 과목은 '미적분I', '수학II', '수학I'입니다([그림 3 참고]). 특히, 대학에서 확률과 통계를 강의할 때는 Excel을, 그리고 선형대수를 강의 할 때는 MatLab 등을 필수적으로 사용하고 있습니다. 물론 고등학교에서는 확률과 통계, 기하와 벡터의 양을 대폭 줄여 수학 II, 수학 I 등에 나누어 배치하고 가칭 고교의 "논증기하학"은 교과목으로 독립하여 고교 수학과 영역에 넣을 수도 있습니다. 이제 수능 과목([그림 3])을 생각해 보십시오. 너무 신나지 않으십니까?

• 대학이 변해야하며 변할 것입니다.
이렇게 되면 이제 대학이 변해야합니다. 공학수학(미분방정식, 편미분방정식, 복소수 포함), 선형대수, 확률과 통계, 정역학, 동역학, 유체역학, 고체역학 등의 학과별 전공과목을 가르치기 위하여 대학은 신입생을 대상으로 미분적분학을 1년에 걸쳐 열심히 가르칠 것입니다. 연습강좌가 개설되고 시간도 주당 3시간에서 4시간으로 늘어날 것입니다. 각 대학 교양교육원이나 교무처에서 자연과학대학과 손잡고 이를 충분히 해결 할 수 있습니다. 추가 예산도 3-5억이면 됩니다. 또한 유치한 방법(?)일지 몰라도 대학평가 항목에 "대학은 이공계 신입생을 대상으로 미적분학을 어떻게 가르치고 있는가? - (5점)"를 넣으면 좋을 것 같습니다.

● 계산기사용을 진지하게 생각해 보셨는지요?

대학교육과정하에서 또 하나 생각해볼 것이 있습니다. 계산기의 사용입니다. 33분의 연구원께서 지적하셨듯이 계산기 사용은 교과서, 평가, 시설이 뒤따라야 정착할 수 있습니다(본 연구보고서 147쪽). 이제 대학교 1학년 미분적분학 시간에 계산기의 사용을 검토해 보겠습니다. 먼저 교재입니다. 원서나 번역본을 많은 대학에서 사용하고 있으므로 교재는 이미 준비되어 있습니다. 계산기의 구입은 2학년에서 공학용계산기를 (단체)구매하므로 1년 먼저 공

10) 김연식 · 김흥기. (1995). 수학 II, ㈜ 두산(p. 183-199).

학용 계산기를 구매하면 해결됩니다. 이는 공과대학하고 협의하면 공대 학생들이 계산기를 두 번 구입하는 일이 버려지지 않습니다. 또한, 평가는 지극히 자율적이라 아무 문제없습니다. 그렇다면 국내 대학들 중에서 1학년 미적분시간에 계산기를 사용하는 대학이 있다는 이야기를 들어보셨나요? 그걸 확인하는 방법은 원서를 사용하고 있는 대학을 체크하면 됩니다. 없습니다! 대학은 모든 여건을 가추고 있으면서 1학년 미적분학 시간에 공학용 계산기를 왜 사용하지 않을까요?
여러분의 제안 중에 초등학교 5학년부터 적극 사용하고 특히 통계를 말씀하셨습니다. 이를 연구하신 분은 자료를 계산기로 표준편차를 구해보지 않으신 분입니다. 즉, 계산기 사용을 수업에서 시도해 보지도 않고 그냥 글을 쓰신 겁니다. 자료를 입력하고 표준편차를 게산기로 구해보셨다면, 예를 들어 문제3(141쪽), 연구보고서가 달라졌을 겁니다.
다시 원점으로 돌아와서 대학에서는 왜 미적분시간에 계산기 사용을 못하고 있을까요? 미적분 시간에 계산기가 필요한 것은 교수법과 관련이 있습니다. 주어진 조건에서 식을 만들어 해를 구하고 이를 그래프로 그려 현상을 확인하고 예측하는 과정을 주요 교수학습 방법으로 했을 때입니다. 우리는 이를 “modeling”이라고 간략히 말합니다. 따라서 계산기는 그래픽 기능이 있는(예를 들어 TI 92, 가격은 40만원 대) 것이어야 하며 가르치는 교수는 프로젝트 과제처럼 복잡한 계산을 동반한 문제를 다룰 때, 필히 물리적 백그라운드를 가지고 있어야 한다는 것입니다. 현재처럼 3학점 3시간은 운영이 불가능하며 학생이나 교수 모두 고등학교《물리 II》의 수준은 되 있어야합니다. 환언하면 특히, 중 · 고에서 바람직하거나 의미있는 실생활 문제를 다루려면 계산기가 필수이지만 이때, 물리 · 화학적 현상이 동반되거나 수학 자체가 복잡성을 가지기 때문에 연구진들이 생각하는 것만큼 대학에서 조차도 간단하지가 않다는 겁니다. 교과서가 원서나 번역본으로 바뀌어야 하는데, 이는 수학과 운영 자금과도 매우 큰 관련이 있기도 합니다.
다시 초중등으로 돌아가겠습니다. 여러분은 계산기의 활용의 예를 단순한 계산, 통계, 그래프 및 함수값, 그리고 무리수의 근삿값 등을 예시로 제공하고 수학수업에서 계산기 등의 공학적 도구사용이 정착할 수 있는 방안으로 “교실환경, 교과서 제작, 수업 및 평가에서의 사용”을 들고 있습니다. 제가 구체적인 예를 들어 33분의 연구원분들께 문제를 제기하겠습니다.

• 고등학교 수학 I : 이차함수 지도
이차함수 지도는 함수의 도입과 그 그래프 지도로 나누어집니다.
먼저, 함수의 도입은((주) 미래엔):

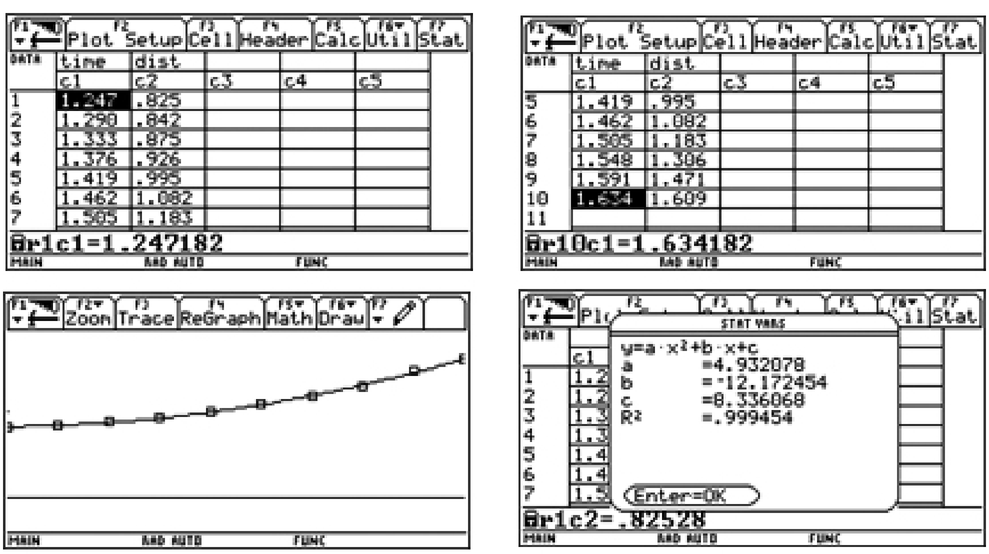
> 어느 골프 선수가 처올린 골프공의 t초 후의 높이를 h m라고 하면 t와 h사이에는 $h(t)=-5t^2 + 20t$의 관계가 성립한다고 한다.

한편, 그래프는 천재교과서(87쪽)의 경우처럼 스마트폰 프로그램으로 알아볼 수 있습니다.

[그림 4] 계산기 교수학습 장비

연구진은 계산기의 사용을 그래프를 그리고 함수 값을 찾는 것으로 이해하지만 계산기 사용의 목적은 함수를 구하는 것을 포함합니다. 환언하면 교사의 교수법이 달라진다는 것을 전재로 하는 것입니다. [그림 4]는 제가 사용하고 있는 계산기, 모션디텍터, 그리고 ViewScreen으로 앞 예와 같이 골프공을 바닥에 떨어뜨리면 센서가 공의 상하 운동을 잡아주고 그 데이터를 TI92에 옮겨 이차함수를 구하는 과정을 구현합니다([그림 5] 참고). TI ViewScreen 92는 액정을 옮겨 논 것으로 이를 OHP에 올려놓으면 학생들은 칠판에 설치된 스크린에서 교사의 모든 계산 과정을 눈으로 볼 수 있습니다. 따라서 "어느 골프선수가 친 공이 의 관계를 성립한다고 한다."는 전형적인 교과서 형 서술 태도가 바뀌게 됩니다. 그래서 이에 맞는 교과서가 개발되어야합니다. 위에서 예를 든 계산기를 사용한 교수법에서 얻은 본질은 중력가속도를 측정한 것입니다. 즉 융 · 복합교육이 자연스럽게 일어난다는 것입니다. 모션디텍터로부터 얻은 데이터로 TI-92가 제공한 함수는 시간의 구간 [1.247, 1.634]에서 입니다([그림 5]). 이로부터

[그림 5] TI92로 이차함수를 구하는 과정



중력가속도는 근삿값 ≃ $2\times4.932=(m/sec^2)$입니다. 따라서 "근삿값"이 다시 교육과정에 들어와야 하며, 또 다른 끔직한 일이 기다라고 있습니다.
중학교 1학년 《과학 1》에서 "힘과 운동"을 다룹니다. 지구가 물체를 끌어당기는 힘을 중력이라고 정의하는데 물체의 무게를 바로 그 물체에 작용하는 중력의 크기로 정의하고 무게의 단위도 N(뉴턴) 또는 kgf(킬로그램힘)를 사용합니다. 중학교 3학년 《과학3》에서 역학적 에너지의 크기를 다룰 때에도 "질량이 100g 인 추", 운동에너지를 다룰 때에도 "질량이 120kg인 미식축구선수는 …" 등으로 다루고 있습니다. 수학교과서에서 무게와 관련된 예를 다루는 경우는 두 가지입니다. 일차함수의 예로 용수철과 추에서 추의 무게를 언급할 때와 통계에서 학생들의 몸무게의 평균을 예로 들 때입니다. 초등학교 4학년 과학교과서에서는 무게와 질량을 구분하지 않고 "질량이 60kg"라고 써야하나 습관적으로 "무게 60kg"으로 사용하고 있다고 언급합니다. 그리고 중학교 1학년에 와서 무게와 질량을 엄격히 구분합니다.
특히 계산기를 도입할 때는 수학 · 과학의 통합교육적인 추세로 봐도 수학시간에 무게와 질량을 구분하여 사용하는 것이 올바릅니다. 특히, 우리가 용수철을 언급할 때는 이미 학생들은 1년 전 과학시간에 질량과 무게를 엄밀히 구분하는 것을 배웠기 때문에 수학 시간에는 아무런 문제가 없다는 것입니다. 수학② (일차함수)에서 추의 무게를 언급할 때,

① 5g인 추를 매달. ② 질량이 5g인 추를 …

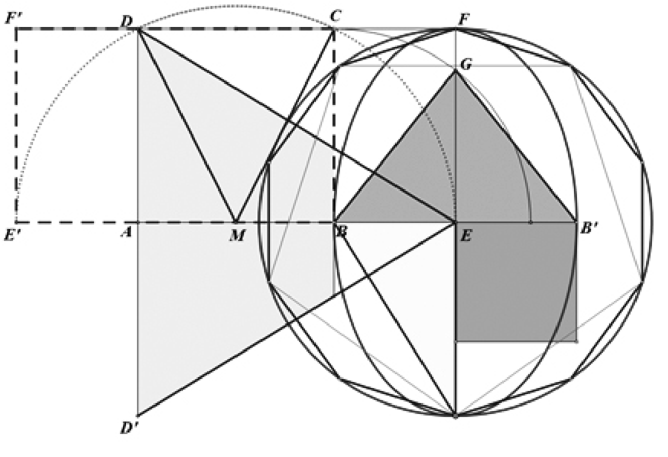
로 표현하는 것이 바람직하며 수학③(통계)에서는 달걀의 무게, 학생의 몸무게를 언급할 때는 수학교실에 앉아 있는 우리 학생들은 이미 과학시간에 질량의 보존법칙까지도 배운 상태입니다.
연구진 여러분! 여러분이 수학I을 가르치신다고 가정하겠습니다. 모든 장비가 갖추어진 교실, 잘 준비된 교과서, 그리고 평가권을 부여할 때 계산기 수업을 하시겠습니까? 저는 여러분이 제안해주신 "다. 미래를 위한 제언(147쪽)"에 동의하기가 어렵습니다. 이제 여러분은 "질량"과 "무게"를 구분해야하는 문제를 접하신 겁니다. 좀 더 진지하게 생각하시고 대안을 제시하시기 바랍니다.

● 논증기하학을 진지하게 생각해 보셨는지요?

33분의 연구진분들께서 기하에 관련하여 133쪽부터 134쪽에서 간략히 다루는데 특이한 사항은 초등학교와 중학교에 대하여는 "도형의 통합과 나선형 결합"이란 내용을 사용하시고 "논증기하학"의 고등학교는 "기하소프트웨어의 사용"을 권장하셨습니다. 연구원선생님들이 초등학교 중학교 그리고 고등학교 교육과정을 전체로 묶어서 연구하지 않으셨다는 것을 다시 한 번 느낍니다. 또한 소프트웨어 사용을 주장하시는 것은 중고등학교 연구진 선생님들께

서는 학교에서 자와 컴퍼스를 수업에 사용하고 계시지 않기 때문입니다. 물론 고3을 대상으로 하라는 것은 아닙니다. 저는 초중 · 고 기하수업에서 항상 자와 컴퍼스를 씁니다. 칠판에서 사용하는 자는 직각 삼각자가 필용하며 컴퍼스는 운동화 끈이 최고입니다. 직각삼각자가 필요한 이유는 직각의 구현 때문입니다. 즉, 각도기는 필요 없습니다. 먼저 초등학교와 중학교 기하수업에 통합과 나선형을 주장하시지만 이와 같은 용어는 부적합하며 먼저 연구원들께서는 동적조화(dynamic symmetry)[11]를 공부하셔야합니다. 우리나라 기하지도의 주제를 보면, 초등은 “작도”와 “도형 채우기”이며 중학교는 도형의 성질과 닮음을 이용한 “논증”입니다. 환언하면, 초등기하는 동적조화를 위한 기하이고 중학교는 논증을 위한 기하로 확연히 구분됩니다. 초등학교 3-1(3~4학년군)에서 선분, 직각, 직각사각형, 대각선으로 시작하는데 동적조화의 필요한 모든 것입니다. 초등학교 3-1의 기하는 그 뿌리를 고대 이집트에 두고 있고 이는 고대 그리스로 전이되어 현대 디자인의 뿌리가 된 것입니다. 초등학교 3-1에서 직사각형과 대각선만으로 원뿔 대, 피라미드 (이상 초등), 정다각형(이상 중학교), 타원과 초점(이상 고등학교)을 활용한 동적조화의 예를 다음에 제시하니 참고하시기 바랍니다.

[그림 6] 뉴턴의 사령선과 쿠푸왕의 대 피라미드의 동적 조화

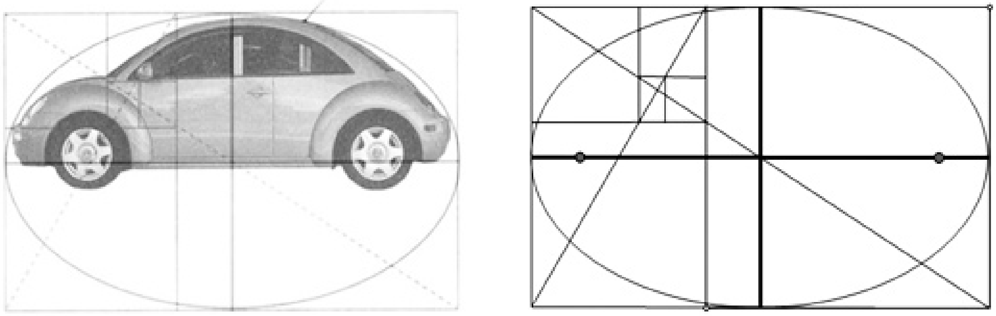


이와 같은 동적조화는 모두 식(방정식, 연립방정식, 함수식 등)으로 표현되기 때문에 중등 기하지도에서 매우 큰 의미를 가지고 있으며 융 · 복합교육의 일환으로 현대디자인 지도를 교실에서 칠판수업으로 진행할 수도 있습니다. 다음 예는 폭스바겐의 Beetle이며 본 디자인은 1997년 Mays, Thomas, 그리고 Schreyer의 작품입니다[12].

11) Hambidge, J. (1920). The elements of dynamic symmetry. New Haven: YUP.

12) Elam, K. (2011). Geometry of design, 2nd ed. New York: Princeton Architectural Press.

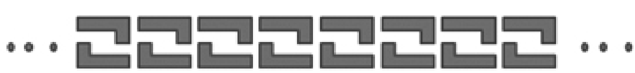
[그림 7] Mays, Thomas, Schreye, 1999



우리는 동적조화를 알아보았는데, 나머지 초등학교의 기하는 도형 채우기입니다. 《초등수학 3-1》에서 '밀기', '뒤집기', '돌리기'를 대상으로 하여 Escher의 작품을 소개하는데 강체운동(isometry of the plane)은 모두 4가지로 좌표로 translation τ (예: $\tau(x,y)=(x+2, y-3)$), rotation ρ (예: $\rho(w,y)=(-y, x)$), reflection μ (예: $\mu(x, y)=(y, x)$), 그리고 glide reflection (예: $\gamma(x, y) = (x+4-y)$)입니다. 《초등수학 3-1》에서 소개하는 규칙적인 무늬 만들기[그림 8]는 'infinite group of isometry'의 예이며 좀 더 구체적으로는 'discrete frieze group'의 예입니다. 예를 들면,

[그림 8] 에셔의 작품지도

[그림 9] $D_\infty = \langle \tau, \rho : \rho^2=1, \tau\rho=\rho\tau^{-1} \rangle$



은 nonabelian group으로 밀기(translation) 와 돌리기(rotation) 로 생성된 무한군

$$D_\infty = \langle \tau, \rho : \text{or } d(\tau)=\infty, \rho^2=1, \tau\rho=\rho\tau^{-1} \rangle$$

입니다. 이와 같은 군은 7개로 분류됩니다. 결론적으로 학교수학에서 초등기하와 중등기하의 차이가 분명하며 초등기하는 디자인지도(동적 조화)로 가야하며 중학교는 "논증기하학"의 교과목 개설과 함께 생각해야합니다.

연구진들께서는 기하소프트웨어를 제시하시기 전에 학교에서 칠판중심 작도지도를 먼저 경험 하시는 것이 좋다고 봅니다. 저는 지난해만해도 서울시 일정연수, 서울시 대수연수, 서울시 영재학급 연수에서 지오지브라 등을 절대 사용하시지 마시라고 잔소리를 했습니다. 물론

그림이 들어간 중간 · 기말고사 문제를 만드시는 데는 사용을 권합니다. 여러분은 칠판중심 교수법을 마음에 두시고 기하교과서의 안을 제안하시는 것이 필요합니다. 왜냐하면 우리들은 이제 칠판으로 돌아가야 하기 때문입니다. 우리들을 칠판에서 떠밀어낸 "열린교육"이 얼마나 허황된 교육학자들만의 이론이었는지 잊어서는 안 됩니다.
논증기하학을 단일 선택과목으로 해서 고등학교에 도입하는 방안을 저는 좋다고 봅니다. 그러나 선행되어야할 연구가 너무 많습니다. 물론 과거처럼 탈레스, 피타고라스 등의 업적으로 논증기하학을 전개하고 탈레스를 "논증기하학의 창시자" 등으로 하면 더 이상 연구할 것이 없습니다. 하지만 탈레스나 피타고라스 등의 업적을 학문적으로 검증한 수학사를 세계적 수준의 내용으로 소개하려면 많은 사전 연구가 필요합니다. 예를 들어 피타고라스는 소위 "피타고라스 정리"를 처음 발견하거나 증명을 한 사람이 아닙니다. 그럴 가능성도 전혀 없습니다. 따라서 용어를 어떻게 해야 할지도 연구해야 합니다.

● 연구진 여러분! 듣고 싶은 것만 듣고 연구 보고서를 쓰시지 않으셨나요?

2013년 3월에 "사교육걱정없는세상 정책대안연구소"는 15개 대학 수리논술 분석[13)]하였습니다. 저는 분석결과를 미리 메일로 받아 공부하고 나서 2013년 3월 21일(오후 6시 반) "제1논찬"에서 수리논술 문제가 100% 교과서에서 출제되었다는 것을 교과서 문제를 예로 하여 제시하였습니다. 당시 모임에서 사교육걱정 연구진은 제 반론에 재반론을 하지 못하셨습니다. 그런데 본 행사의 연구보고서 160쪽과 161쪽에서 다음과 같이 쓰여 있습니다.

> "사교육 걱정없는 세상"에서 매년 꾸준히 하고 있는 대학별 논술시험 분석 결과에 의하면 논술 문항의 대부분이 본고사 형으로 분류된다고 한다. 사실 대학별로 시행함으로 인해 서로 다른 문항 유형에 적용하기 위해 사교육의 힘을 빌릴 수밖에 없는 상황이다. (중략) 대학 논술 고사를 폐지하는 것이 옳으며 ...

물론 2014학년도에서는 위에서 말한 것이 사실일지 몰라도 2013학년도 논술문제는 사교육걱정에서 주장하는 것처럼 문제를 가지고 있지 않았습니다. 흥미로운 것은 연구보고서 24쪽에 싱가포르 대학입학과정 A레벨 이계도함수 시험 문제 예시[14)]를 좋은 것으로 들었지만 2013년에는 이와 유사한 국내 대학 문제를 본고사 문제로 분류하였습니다.

---

13) 33명의 교사가 참여하여 2013학년도 수도권 15대학에서 "33.7%가 대학 교과 수준에서 출제되었다."고 주장하였다.

14) $\frac{d^2y}{dx^2} = -\left(1+\frac{dy}{dx}\right)^2$

저는 2010년 7월에 EBS에 수리논술 강의를 모두 50분짜리 50강좌로 올려놓아 지금도 전국의 학생들이 무료로 사용하고 있습니다. 본 연구나 사교육걱정 주관으로 대학에서 출제한 논술이 본고사인지 아닌지 판정에 참여하는 30명 이상의 수학선생님들께서는 여러분이 재직하고 계신 학교에서 수리논술을 가르치고 계시는지요? 지난 겨울에 2015년부터 교장 재량 하에 논술을 선택과목으로 개설(2시간)할 수 있도록 교육부가 일선 교육청에 공문을 보냈습니다. 제가 살고 있는 인천의 경우 80개에 가까운 고등학교 중에서 고3을 대상으로 논술을 개설한 학교는 하나도 없습니다. 참고로 33분의 연구진 선생님들은 고등학교에서 계산기를 활용한 수업이 논술 수업보다 더 어렵다는 것을 알아야합니다.
연구진은 연구 보고서 151쪽에서 지필평가 중심의 수학과 평가의 문제점을 지적하셨습니다. 특히 〈표 V-100〉에서 "나, 다를 제외한 항목은 실제 학교 현장에 정착되어 진행되고 있지 못하고 있다"고 주장하셨습니다. 교장 재량으로 개설할 수 있는 수리논술(주당 2시간)을 열었을 때, 일선학교 선생님들은 어떤 평가를 하실 수 있을까요? '나', '다'를 제외한 항목을 적어보겠습니다.

【표 3】2009 개정 수학과 교육과정 평가 규정(나, 다 제외)

가	교사의 수업 방법 개선
라	서술형 평가, 관찰, 면담, 자기 평가 등의 종합적인 평가
마	과정도 중시하여 평가
바	수학 학습에 대한 관심, 흥미, 자신감, 가치인식 등의 정도를 파악
사	공학적 도구와 다양한 교구를 이용할 수 있는 기회를 제공

놀랍게도 위 표에서 말하는 평가는 수리논술의 도입 취지 및 논술평가 항목 그대로입니다. 여러분이 논술 수업을 학교에서 할 때, 위 표가 말하는 모든 평가항목을 활용할 수 있다는 것입니다. 그런데 왜 논술 강의에 나서지 않을까요? 이 물음에 대한 연구진 선생님들의 답변은 꽤 중요합니다. 왜냐하면 33분의 연구진이 제시한 "3. 학교 현장에서의 다양한 평가방법의 정착을 위한 정책 제안"(154쪽-166쪽)의 신뢰를 떨어뜨릴 수 있기 때문입니다.

제가 먼저 답하겠습니다. 가르치는 것이 싫어서입니다.

물론 그렇게 교장에게 답하지는 않습니다. 제가 인천에서 몇 몇 학교 사정을 알아보았을 때, 그 대답은 주로 "바쁘다." 입니다. 바쁜 이유 중에는 영재학급 강의를 들기도 합니다. 핵심 이유를 두 가지로 들어 보겠습니다. 물론 연구원님들께서는 동의하지 않으실 수 있지만 잠시 들어 주시기 바랍니다. 첫째, 학생들은 교과서나 참고서를 가지고 수업하시는 수학선생

님의 평소 수준을 잘 알고 있는데 아이들이 논술을 그 선생님한테 들으려고 할까요? 그것도 입시를 앞둔 고3인데 말입니다. 아침에 참고서의 답을 보고 들어오셔서 수업하시는 것을 학생들이 안다는 것입니다. 둘째, 지난해까지만 해도 수준별 수업을 2+1, 3+1 등으로 학교에서 시행했습니다. 그 때, 우리 선생님들의 대부분은 하반을 기간제 교사들에게 맡기셨지요. 다시 말해서 반에서 떠들고 공부 못하는 애들을 따로 모아 비정규직 선생님께 맡기신 겁니다. 이제 우리 선생님들은 가르치는 것을 즐겁게 여기지 않는다는 겁니다.
08학년도 수리논술이 도입될 때, 대학이 가진 본질적인 취지는 교사들의 교수 방법의 변화를 꾀하기 위해서였습니다. 당시에 서술형 평가가 시행되고 있었지만 서울 등 극히 일부에서 20% 정도를 시행했고 그 것도 단답형이 주류를 이루고 있었습니다. 이와 같은 5지선다형 수업을 바꿀 수 있는 대안으로 도입한 것이 수리논술입니다. 그 핵심은 학교 선생님들의 교수법 변화에 있습니다. 2007년 수리논술 도입당시에 저는 "전국입학처장협의회 회장"을 맡고 있었기에 당시의 사정을 정확히 알고 있습니다. 논술 도입으로 인하여 서술형 평가가 현재까지 학교현장에서 확대 시행되고 있고, 통합형 지도의 어려움으로 통합형 논술이 변형되어 오늘과 같은 과목 독립형으로 자리를 잡은 것입니다.
대학논술분석에 참여하시는 선생님들은 학교에서 학생들에게 논술은 가르치지 않으면서 출제된 논술이 본고사인지 아닌지를 분석 · 판정하는데 시간을 보내는 것이 옳은 것인지 그리고 바르게 판정할 수 있는지 생각해 보셔야합니다.

● 너무 쉬운 연구를 택하지 않으셨나요?

우리나라 교과서의 집필상의 특징을 보면 초등의 경우 서로 잘 아는 교대 교수와 초등교사들 끼리 모여 문을 닫아걸고 집필과 심의를 하고 있으며, 중등 교과서는 교수님들보다는 일선학교 선생님들과 출판사 직원들이 주로 집필하여 이를 교수와 교사들로 꾸려진 심의위원들이 심의를 하는데, 이때는 오탈자 및 계산오류를 찾아내는 것이 주된 일로서 이 모두가 대한민국의 수학교육계가 가지고 있는 불편한 진실입니다. 특히, 현행 교과서는 중학교 전 교과서를 1년 안에 마무리하고 다시 고등학교 전 교과서를 1년 안에 완성해야 하는 일정 하에서 여러분의 지적(86쪽):

> 구성주의 교육철학에 의한 자기 주도적 학습 경험이 교과서 집필자들에게 없기 때문이며 아직껏 그 누구도 이 분야에 새로운 시도를 한 적이 없다는 것이 가장 큰 이유라고 봅니다.

은 적합해 보이지 않습니다. 우리나라 교과서에는 제2판이라는 것이 없습니다. 구성주의를

꺼내시는 것 보다는 2년에 중/고 교과서 모두를 연이어 완성해야하고 2판이 없으며 이름만 빌려주는 교수들이 있는 구조를 지적하는 것이 솔직한 연구자세가 아닐까합니다. 물론 출판사는 책을 출간한 후에도 교육부와 책값 결정을 해야 하는 일이 남아 있습니다.
2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정 하에서 출간된 교과서를 간략히 보면 진법이나 근삿값을 삭제하면서 2진법은 컴퓨터와의 관계에서 그리고 근삿값은 타 영역과의 연결의 결핍을 이유로 들었다. 한편, 고급수학에서는 외모(?)가 너무 간단해 보이는 이계미분방정식을 다루라고 했지만 이에 대한 풀이는 거의 불가능(?)합니다. 지면 때문에 간단히 든 이들 세 가지 예는 교육과정에서 내용을 선정하시는 분들이 대학에서 최소한 미분적분학이나 미분방정식을 가르쳐본 경험이 없는 교과교육학자이기 때문에 발생한 것입니다. 그리고 초등은 칼라사용이 허용되고 스토리텔링이 도입되었고, 특히 수학사를 아예 다루지 않아 한마디로 초등교과서는 칼라플한 학습지입니다, 중등 또한, 칼라사용이 허용되면서 삽화가 화려해졌고, 특히 수학사의 왜곡이 심화되었습니다. 시간상 몇 개의 예를 들어보겠습니다.

○ 초등학교 교과서의 예

• 이집트인의 곱셈법

초등학교 교과서가 다루는 수학은 “수학문명의 출처”가 없는 그냥 학습지입니다. [그림 10]은 이집트의 곱셈법을 소개한 것으로 아메스 파피루스에서 다루는 여러 계산에서 찾아볼 수 있습니다. 알고리즘은 주어진 수를 2의 거듭제곱 수의 합으로 표현한 최적화 기법(Greedy Algorithm)입니다. 힉소스왕조의 문서 보존 계획에 의하여 집필된 산술서인 《아메스 파피루스》의 서문에서 아메스는 자신을 힉소스왕조 파라오 아포피스 33년에 고대 이집트 제12왕조 아메넴하트 3세(재위기간; 1859-1814 BCE)때 쓰인 고문서를 복제(copy)하는 서기(scribe)라고 밝히고 모두 87개의 문제를 책으로 저술하였습니다.[15]

[그림 10] 고대 이집트인의 곱셈법

고대 이집트를 언급하지 않는 것은 바람직하지도 않으며 아프리카의 가치를 교과서에 담아야합니다.

15) Chace, A. (1979). The Rhind mathematical papyrus. Virginia: NCTM.

제가 여러 차례 선생님들에게 확인한 결과 만화로 되어 있어 본 내용을 수업 중에 얘기하지 않았답니다. 자판기에서 떨어지는 동전의 순서는 이집트 곱셈법에서 가져온 것입니다.

• 각도의 역사

초등수학 4-1 '이야기 마당'에서 각도의 역사를 다룹니다. 내용을 살펴보면 교과서는 "360일이 지나면 태양이 같은 자리에 떠 태양처럼 생긴 원을 그리고 원을 똑같이 360으로 나눈다."고 언급합니다. 다시 한 학생은 1년이 360일 이니까 원은 360도가 되고, 따라서 1도가 생겨났다는 것을 확인하는 황당한 이야기를 소개합니다([그림 11] 참고). 한편, 교사용 지도서는 기원전 2000년경에 각도에 대한 연구가 활발했으며 태양이 1년(365일) 마다 같은 자리에서 뜨는 것을 보고 태양을 본뜬 원이 360도라고 생각했다는 내용을 교사들에게 전합니다.

[그림 11] 초등 교과서가 말하는 각도의 역사

이는 오해이고 논리에도 맞지 않습니다. 이집트의 고왕국 시대(B.C. 3000~B.C. 2450)에 이미 1년을 12개월(1개월은 30일)에 5일을 더한 365일로 사용하고 있으며[16], 태양을 본뜬 원이 아니라 중학교 과학시간에 나오는 황도입니다. 노이게바우어(O. Neugebauer)에 따르면 기원전 8세기 이후에 바빌론인들의 체계적인 천문 관측 자료가 발견되며 기원전 5세기 초에 바빌론인들은 황도 길목에 있는 12개의 별자리 황도 12궁을 발견합니다. 12궁을 같은 크기로 하고 이를 30 μs(길이의 뜻임)로 나누어 따라서 황도를 360단위로 나누었고 현재 이를 각도라 부르고 있습니다[17]. 30등분으로 한 이유는 그들이 사용한 60진법에서 60의 절반을 택한 것으로 추측합니다.

이와 같이 초등교과서는 아시아와 아프리카의 가치를 의도적이든 비의도적이든 인정하지 않고 있습니다. 우리나라 수학교과서는 고대 그리스의 가치만을 인정한다는 것입니다. 또한

16) Neugebauer, O. (1969). The exact sciences in antiquity, 2nd ed. New York: Dover.

17) Van Brummelen, Glen. (2009). The mathematics of the heavens and the earth: The early history of trigonometry, Princeton: Princeton Univ. Press

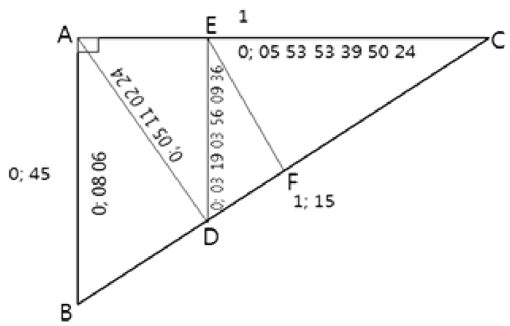
충격적인 것은 초등 수학교과서에서 다루는 모든 수학사(교사용 지도서 제외)는 오직 세 가지로 앞에서 예를 든 두 가지와 5~6학년군에서 다루는 "피타고라스 음계"입니다. 이와 같은 결과는 새 교과서가 스토리텔링을 추구했기 때문이며 교과서 저술에 참여하신분들이 수학사를 중요히 여기지 않으셨기 때문이라고 저는 판단합니다. 그러나 초등 교과서에서 다루는 대부분의 수학은 기원전 2000년 경 고대 이집트와 고 바빌로니아 수학 범주 안에 있는 것들입니다. 집필진들은 지금이라도 이를 심각하게 받아드리고 다음에 연구진과 집필진을 꾸밀 때, 특정 교대 중심에서 탈피하고 심의진의 경우 전문성을 고려한 위원을 위촉하는 것이 필요합니다.

○ 중 · 고등학교의 예

• 탈레스는 닮음(비례)의 신인가?

기록에 의하면 삼각형의 닮음비의 사용은 기원전 1800년경으로 올라갑니다.[18] 점토판 IM 55357([그림 12])는 기원전 1800년경에 사용된 것으로 추정되며 닮음 삼각형의 성질이 쓰이고 있습니다. 그럼에도 불구하고 우리는 탈레스를 "닮음의 신"이라고 학생들을 가르쳐왔습니다.

[그림 12] 점토판 IM 55357



• 피타고라스는 소위 "피타고라스 정리"를 발견/ 증명했는가?

유클리드의 원론 Book VI(Proposition 31)에서처럼 삼각형의 닮음 성질을 사용하면 대각선 성질의 증명이 상대적으로 쉬운데, 피타고라스 학파는 완벽한 닮음비 이론을 가지고 있지 않았습니다. Book I(Proposition 47)의 방법이 어려운 이유는 닮음 도형의 성질을 사용하지 않기 때문이며 클라인(M. Kline)이 제시한 최상의 가능성은 기원전 400년 경 후기 피타고라스 학파에서나 논리적인 증명이 이루어질 수 있다는 것입니다[19]. 메르츠바흐 · 보이어(Merzbach · Boyer도 피타고라스 학파가 처음으로 증명했다는 추측은 정당화될 수 없다고 말하며 초기 피타고라스 학파는 바빌로니아로부터 정보를 얻어 본 정리를 잘 알고 있던 것으로 설명합니다[20]. 모든 중등 수학교과서는 피타고

18) Ho̷yrup, J. (2002). Lengths, widths, surfaces, A portrait of Old Babylonian algebra and its kin. New York: Springer.

19) Kline, M. (1972). Mathematical thought from ancient to modern times, Vol. 1. Oxford: Oxford Univ. Press.

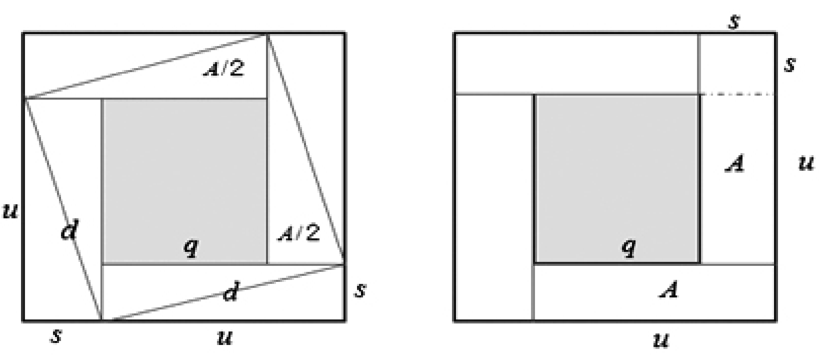
20) Merzbach, U. and Boyer, C. (2011). A history of mathematics, 3rd ed. New Jersey: Wiley.

라스를 소개할 때 그가 이집트에서 수학했다는 내용은 담고 있지 않는데 버낼에 따르면 사료 비평(source criticism)의 기법은 1820년대부터 이집트에서 공부한 그리스인이 남긴 기록을 공격하는데 이용되기 시작했다는 겁니다.[21]

> 19세기 인종주의의 심화와 더불어 이집트에 대한 혐오가 점차 고조되면서 사람들은 이집트를 더 이상 그리스의 문화적 선조가 아닌 것으로 하였다. 제2차 세계 대전 무렵에는 그리스가 이집트와 페니키아에서 상당한 문화적․언어적 차용을 한 바 없으며, 그리스 현자들이 이집트에서 수학했다는 것은 흥미롭기는 하지만 터무니없는 소리에 불과하다는 생각이 확고히 자리 잡았다.

이암블리쿠스(Iamblichus, 250-330)에 따르면 18세에 고향을 떠난 피타고라스는 탈레스의 제자가 되었으며 본인이 고령인 이유에서 탈레스는 피타고라스가 이집트로 수학하기를 종용했다고 하며 특히, Memphis와 Diospolis의 사제들을 만나기를 권했다고 합니다. 피타고라스는 이집트의 신전에서 22년간 머무르면서 천문학, 기하학 등을 수학하고 바빌론에서 12년간 머무르면서 수론, 음악, 수리과학을 배워 지식이 최고점에 도달한 56세에 사모스로 돌아갑니다.[22] 이소크라테스(Isokrates, 436-338 BCE)는 "피타고라스는 이집트 방문 중에 그 민족의 종교를 배우는 학생이 되었으며 그리스인에게 처음으로 온전한 철학을 가져다주었다."고 분명히 명시하고 있습니다.[23] 소위 '피타고라스 정리'의 최초의 증명을 프라이베르크는 점토판에 있는 계산을 바탕으로 다음 그림으로 제시합니다.[24]

[그림 13] 고 바빌로니아인들의 "대각선 규칙" 증명



---

21) Bernal, M. (2012). 블랙 아테나, 제2권(오흥식 옮김). 서울: 소나무.

22) Iamblichus. (1991). On the Pythagorean way of life(Text, Translation, and Notes: J. Dillon and J. Hershbell). Atlanta: Scholars Press.

23) Bernal, M. (2011). 블랙 아테나, 제1권(오흥식 옮김). 서울: 소나무.

24) Friberg, J. (2007). A remarkable collection of Babylonian mathematical texts. New York: Springer.

우리는 피타고라스 정리라는 용어를 사용하지 말아야합니다. 일부 전문가들은 “직각삼각형 성질” 또는 “대각선 규칙”으로 사용하고 있습니다. 우리나라 수학교육계에서도 이를 심각하게 고려해야 합니다. 초등학교 5~6학년군에서 소개하고 있는 “피타고라스 음계” 역시 히파수스의 업적이며 그와 같은 용어도 1600년대에 와서야 사용되기 시작한 것입니다. 중학교에서 사용하는 용어 “피타고라스 수” 역시 황당한 정의입니다. 일부전문가들은 “Egyptian triple“로 부르는데 이것이 옳은 명칭이라고 저는 판단합니다.

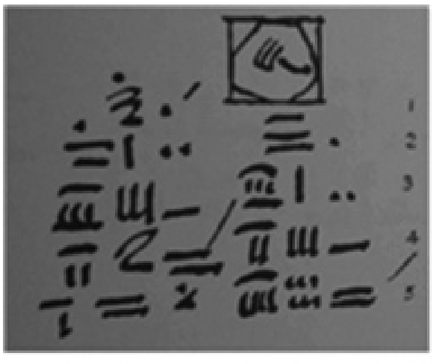
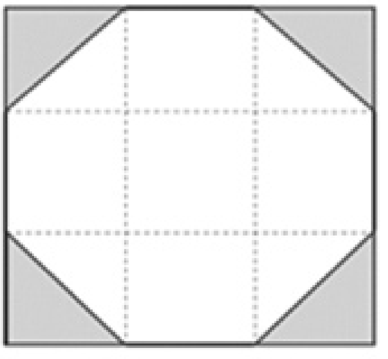
• 파르테논 신전의 전면은 황금비로 되어 있는가?

파르테논 신전의 전면은 황금비로 이루어져 있지 않습니다.[25] 현 ‘2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정 하’에서 출간된 모든 고등학교 수학교과서는 황금비의 예로 더 이상 파르테논 신전을 다루지 않고 있지만 황금사각형의 적합한 예를 제시하지 못하고 있습니다. 한편, 4종의 중학교 교과서와 융 · 복합교육 등에서 파르테논 신전을 황금비의 예로 다루고 있는데 적합한 교수 · 학습자료의 개발이 필요하다고 봅니다.
프리츠(K. Fritz)와 비어드(C. Beard)는 황금비의 뿌리를 고대 그리스(히파수스)와 고대 이집트(쿠푸왕의 대 피라미드)에서 각각 찾고 있으며[26] 유클리드(Euclid)는 우리가 지금 부르고 있는 소위 황금비를 《원론》에서 모두 3가지 방법(Book II, Proposition 11; Book VI, Proposition 30; Book XIII, Proposition 8)으로 소개하고 그 이름을 황금비(golden ratio, golden section)가 아닌 ‘extreme and mean ratio’로 사용합니다. 우리는 유클리드가 사용한 용어 ‘extreme and mean ratio’를 ‘극대와 극대가 아닌 비’로 학교수학에서 사용하는 것도 옳다고 보는데 ‘황금비’라는 용어가 영어로 도입된 시기는 1898년으로 최근의 일입니다. 유럽은 고대 이집트인들의 업적을 무시하고 황금비란 용어를 사용하면서 이를 고대 그리스의 업적으로 하고 있다는 저는 주장합니다. 우리는 교과서에 비어드(C. Beard)의 주장을 반영해야 한다고 생각합니다. 그리고 얼마나 오랜 기간 동안 우리는 학생들에게 파르테논 신전을 황금비의 예로 가르쳐 왔는지 반성해야 합니다. 특히 초등 영재학급에서 말입니다. 더욱 당황스러운 것은 2009개정 교규과정에서 출간된 모든 고등학교 교과서에서는 파르테논 신전이 황금비의 예에서 빠졌는데 이를 대체하는 적합한 황금비의 예를 모든 출판사들이 제시하지 못했다는 것입니다.

25) Markowsky, G. (1992). Misconceptions about the golden ratio. College Math. J. 23, 1–19.
Trachtenber, M. and Hyman, I. (2002). Architecture: From prehistory to post–modernism, 2nd ed. New Jersey: Prentice Hall.
26) Fritz, K. (1945). The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum. Annals of Math. 46, 242–264.
Beard, C. (1968). The Fibonacci drawing board–design of the great pyramid of Giza. Fibonacci Quarterly 6, 66–68

• 아르키메데스의 묘비를 로마 장군이 세워주었는가?
플루타르코스(Plutarch)는 마르겔루스가 아르키메데스의 죽음을 슬퍼하여 그의 가족을 찾아 잘 돌보아주었다고 쓰고 있으며[27], 아르키메데스의 일화와 그의 죽음(기원전 212년)은 카르타고와의 전쟁인 2차포에니 전쟁(기원전 218년–기원전 201년)중에 일어난 이야기로 로마는 17년 동안 계속된 전쟁에서 그들 모두가 노예가 되거나 로마 문명이 종말을 맞을지도 모른다는 절박한 위기감 속에 있었습니다. 특히, 아르키메데스가 사망하기 4년 전인 기원전 216년에는 칸나이전투를 비롯한 남부 이탈리아에서 로마군은 하니발 장군에게 궤멸되기도 했습니다. 메르츠바흐 · 보이어(Merzbach · Boyer)는 플루타르크 영웅전에서 언급하는 내용을 다루지 않고 2차포에니 전쟁만 간단히 한 단락으로 언급하면서 마루겔루스가 천체의 운동을 묘사하기 위해 제작한 아르키메데스의 독창적인 그림을 약탈품으로 챙겼다고 전하고 있습니다.[28] 우리나라 교과서는 로마 역사가의 '아름다운 이야기(picturesque)'를 더 아름답게 왜곡하여 소개하고 있다는 것이 큰 문제입니다.
1958년 보겔(K. Vogel)은 고대 이집트인들이 정사각형에서 팔각형으로 이어지는 기하적인 접근으로 원의 넓이를 구한 것으로《아메스 파피루스》문제 48번[29]을 해석합니다([그림 14]).[30] 지름이 인 원에 외접하는 정사각형을 설정하고 네 변을 각각 3등분하면 정사각형은 9등분되고 각 모서리의 삼각형을 제외시키면 팔각형을 얻습니다. 이때, 팔각형의 넓이는 81−4(9/2)=63이고 한 변의 길이를 √63으로 하기 위하여 √63에 가까운 값 √64=8 을 택하면 됩니다.

[그림 14] '아메스 파피루스' 48번과 보겔의 해석

27) Plutarch. (2014). Parallel lives(플루타르크 영웅전)(홍사중 옮김). 서울: 동서문화사.
28) Merzbach, U. and Boyer, C. (2011). A history of mathematics, 3rd ed. New Jersey: Wiley.
29) 체이스(A. Chace, 1979)의 문제 48번 번역은 명백한 오역이다. 정사각형에 내접하는 원이 아니라 팔각형이다(R. Gillings, 1982).
30) Gillings, R. (1982). Mathematics in the time of the pharaohs. New York: Dover.

문제 48번의 접근 방법을 알렉산드리아에서 교육받은 아르키메데스가 알고 있었을까요? 이집트로부터의 차용을 숨기는 그의 정직하지 못한 태도로 디오프(C. A. Diop)로부터 비난받기까지 했지만 아르키메데스의 인지문제는 고대 이집트로부터의 수학문화의 차용이라는 시각에서 논란거리입니다.[31)]
아메스가 제시한 팔각형은 원에 내접하거나 외접하지는 않지만 아르키메데스가 알렉산드리아에서 교육받았기 때문에 이집트의 영향을 완전히 배제하기에는 어려움이 따른다는 겁니다. 실제 팔터(R. Plate)는 주석 번호 31에서 디오프가 아르키메데스의 증명과정을 이해 못한 것으로 그의 주장을 일축하지만 정다각형으로 접근한 아르키메데스의 아이디어를 독립적인 것으로 보기에는 어렵습니다. 우리는 이를 어떻게 교과서에 반영해야 할까요?

• 디오판토스의 묘비명은 사실인가?
중등 수학교과서에서 소개하는 디오판토스의 나이 문제는 600년경에 기록된 그리스 명시선집 《The Greek anthology》(Book XIV, 126번)의 수수께끼 문제입니다.[32)] 대부분의 문제는 491-527년경에 살았던 메트로도루스(Metrodorus)의 이름으로 나오고 “6명에게 사과를 나눌 때, 4명에게 차례로 만큼 주고 5번째 사람에게 10개 그리고 마지막 사람에게는 1개의 사과를 준다.”처럼 사과나 견과를 사람에게 나누어 주는 문제가 대부분이며 이것은 방정식 로 《아메스 파피루스》의 33번 문제와 같은 형태입니다.
본 수수께끼가 사실인지도 확인할 수 없습니다. 즉, 《그리스 명시선집》에 나오는 퍼즐이고 디오판토스의 생애에 관해 아는 것이 거의 없기에 주목을 받는 문제라는 것입니다. 교과서에서 이를 “디오판토스가 자신의 묘비에 나이를 알 수 있도록 기록해 두었다.”로 자의적으로 언급하는 것은 역사왜곡입니다.
우리는 수학시간에 얼마나 많은 왜곡된 역사를 학생들에게 가르쳐왔나요? 저는 최근 수년간 우리나라 초등학교부터 고등학교까지 모든 출판사별 수학 교과서에 언급된 역사를 검증해보았습니다. 결론적으로 우리나라 교과서는 아시아 아프리카적 가치를 무시하고 유럽 제국주의적 사관으로 교과서를 집필하여 그 것을 그대로 학생들에게 가르쳐 왔습니다. 환언하면 우리나라 수학 교과서는 기축시대(axial age)의 유물이라는 것입니다. 새 교과서가 도입되는 과정에서 중학교 수학 교과서의 수학사의 서술의 출처를 출판사에 요구하자 이듬해 고교 수학교과서 집필할 때, 수학사를 전혀 다루지 않는 출판사가 있었으며 아이러니 하게도 이 출판사의 교과서 점유율이 높았다는 것입니다. 교사들이 교과서를 선택할 때, 수학

31) Palter, R. (1993). Black Athena, Afro-centrism, and the history of science. Hist. Sci. 31, 227-287.
32) Paton, W. R(Translated). (1979). The Greek anthology (BOOKS XIII-XVI). Massachusetts: Harvard Univ. Press.

사 같은 읽기 자료에는 관심이 없고 차시별로 정확히 떨어지고 눈에 익은 구성을 선호한다는 것입니다. 저는 여러분들이 이에 관한 문제를 심각하게 받아드리시고 연구하시기를 기대합니다.

● 끝으로 33분의 연구진이 공부해야할 것을 추천해봅니다.

• 이 · 공계 수학 관련 대학 교육과정을 공부하셔야합니다.

초등학교 교사들이 초등학교 교과서만 보고 초등교육과정을 말하는 것은 위험합니다. 수학은 상위 연관 관계가 명확한 교과이기 때문입니다. 마찬가지로 중등 선생님들도 초등 교과서를 깊이 있게 연구해야합니다. 물론 현시점에서 우리나라의 수학교육문제에 대한 대안을 제시하기 위해서는 대학에서의 수학 관련 교육과정을 함께 연구하는 것이 꼭 필요합니다.

• 중등 과학교과서를 공부하셔야합니다.

중학교 2학년에서 용수철을 이용하여 일차함수를 지도하는데 학생들은 이를 1학년 과학에서 이미 배웠습니다. 과학교사와 수학교사는 달라도 가르치는 학생들은 같다는 것입니다. 이와 같이 과학교과가 다루는 내용을 연구진은 파악하고 있는 것이 바람직합니다. 분수함수, 이차함수, 삼각함수, 지수함수를 용어의 설명보다는 자연현상으로 중학교 과학에서 가르치고 있습니다([그림 15]). 제 방에는 중 · 고등학교 과학교과서가 많이 있습니다. 여러 연구진께서 과학교과서를 참고하시면 향후 융 · 복합 교육에서도 많은 일을 하실 수 있다고 봅니다. 기대가 됩니다.

[그림 15] 중학교 과학시간에 다루는 함수

함 수	표 현	학년	용 어	내 용
일차 함수	용수철계수	3	일의 양	Hook의 법칙
	전기저항	2	전류의 세기가 달라지는 이유	Ohm의 법칙
	등속운동	2	등속직선운동	등속운동
이차 함수	제동거리	3	속력과 제동거리	실험데이터
	운동에너지	2	낙하하는 물체의 속력변화	½ mv^2
		3	운동에너지, 위치에너지	
지수 함수	냉각곡선	2	증류수와 소금물의 냉각곡선	그래프제공
삼각 함수	밀물과 썰물	1	방향이 변하는 운동	그래프제공
	진자의 운동	2	마루, 골, 진폭, 파장, 주기	

• 수학사를 공부하셔야합니다.
그동안 우리는 얼마나 많은 역사왜곡을 하고 이를 학생들에게 가르쳐왔는지 반성해고 시정하려는 노력을 해야 합니다. 필란드나 미국 등의 외국 교과서가 다루는 수학 내용을 비교 연구한다는 것이 멋있어 보일지 몰라도 이는 너무 쉬운 길이며 지금부터 무엇을 연구해야할지 고민해야합니다. 그러고 나서 본 보고서와 같은 연구를 진행하셔도 늦지 않습니다.

결론적으로 연구진들께서는 보고 싶은 것만 보려 하지 말고, 보이지 않는 것을 보려고 노력해야합니다. 저는 본 보고서를 연구 보고서라 부르는 것을 지금 주저하고 있습니다. 향후 수학사 및 이공계 대학 수학 관련 교육과정을 연구하시고 초등학교부터 대학 수학 관련 전 교육과정을 하나로 연결하여 유기적으로 분석하시고, 그 결과를 바탕으로 의미 있는 결론을 도출하시기 바랍니다. 과학교과도 같이 연구하시기를 바랍니다. 물론 각론에서는 여러분의 실질적인 경험이 녹아 있어야합니다. 33분의 연구진들의 다음 연구결과를 기다리겠습니다. 물론 저를 다시 논찬자리에 불러주실 거라고 믿습니다.

6개국 교육과정 비교 분석 ②
논증 기하

배수경(경기 호곡중학교 수학교사)

고대 그리스 시대부터 현대에 이르기까지 '논증 지도'는 수학교육에 있어서 중요한 핵심 주제였다. 이러한 논증은 서양적 사고의 근간을 이루며 민주주의의 바탕이 되었고 1950년대 수학교육 현대화 운동을 거쳐 우리나라 교육과정에 영향을 끼치게 되어 급기야 제 3차 수학과 교육과정에서는 논증 교육이 최고 정점에 이르렀다(김정하, 2010). 물론 이러한 과정에서 우리나라 논증 교육이 가장 영향력 있게 버틸 수 있었던 영역은 다름 아닌 '기하'이다.
특히 최근까지의 우리나라 중학교의 논증기하는 2천 년 전에 성인 수학자를 위해 쓴 〈유클리드 원론〉의 내용을 중학교 학생 수준에 맞추어 초등화한 것으로서 공리계까지 지도하지는 않지만 도형의 몇 가지 기본적인 성질을 받아들이고 삼각형의 합동조건과 닮음조건 및 보조선 방법을 이용하여 연역적으로 추론하도록 하는 유클리드 기하의 틀을 그대로 유지해왔다(우정호, 2007).
그렇다면, 이러한 배경을 가진 우리의 기하 교육은 과연 무엇을 향해 달려가고 있는 것일까? 2009 개정 교육과정의 수학 과목 목표에 의하면 "수학적 개념, 원리, 법칙을 이해하고, 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 길러, 여러 가지 현상과 문제를 수학적으로 고찰함으로써 합리적이고 창의적으로 해결하며, 수학 학습자로서 바람직한 인성과 태도를 기른다." 라고 한다. 또한, 발제문에서 지적한 바 수학교육에서 핵심역량에 해당하는 추론 능력은 논리적 사고력과 관련되고 이러한 논리적인 추론 능력을 기하학적 직관 능력을 바탕으로 하여 향상시키는 것이 수학교육의 일반적인 방향이라고 할 수 있을 것이다.
하지만, 교육 현장에서의 현실은 우리가 목표하고 바라는 방향대로만 가는 것 같지는 않다. 학생들은 수학적 개념, 원리, 법칙을 이해하는데 어려움을 느끼고, 수학적으로 사고하고 의사소통하기에 시간이 부족하며, 여러 가지 현상과 문제를 수학적으로 고찰하여 창의적으로 해결하기에 현행 교과서가 제시하는 내용으로는 역부족이다. 따라서, 학습자로서 수학을 마냥 좋아하고 푹 빠져들기에는 분명 한계가 있고 이 모든 일의 끝에서 추론 능력을 획득하는 일은 쉽지 않아 보인다.

그렇다면, 이러한 일들이 왜 어렵기만 한 것일까? 중학교 수학교사로서 생각되는 이유들을 발제문의 내용 순서에 따라 다음과 같이 서술하고자 한다.

첫째, 중학교 수학 교과서의 기하 영역의 문제점에 대한 것이다.

발제자가 지적한 대로 2009 개정 교육과정에 따른 수학 교과서에서는 '증명'이라는 용어의 사용만 하지 않았지 연역적 추론의 과정이 담긴 형식적 증명이 본문의 내용 혹은 예제 문제의 형태로 존재하는 것이 사실이다. 물론 학생들에게 제시되는 문제로서도 역시 '설명하여라'라는 말로써 제시되는 경우도 많다. 2009 개정 교육과정의 가장 큰 이슈였던 '형식적 증명보다는 정당화'라는 입장에서 본다면 매우 아쉬운 대목이다. 학생들 나름대로는 자신의 수준에서 적절한 방법으로 다양한 수학적 정당화를 할 수 있으나, 수학 교과서는 여전히 과정을 단순화한 경제적인 방법만을 제공함으로써 학생과 교사 모두가 어려운 증명만을 주로 다루게 된 것이다(김정하, 2010).
수학적 명제가 참임을 자신 또는 타인에게 확신시키기 위해 사용하는 방식으로는 증명(proof), 정당화(justification), 타당화(verification), 설명(explanation), 논증(argumentation) 등이 있을 수 있고, Tall(1991)에 의하면 수학적 정당화도 활동적 정당화, 시각적 정당화, 조작적 증명, 형식적 증명으로 다양하게 다룰 수 있지만 현행 교과서는 이런 다양한 방법의 정당화의 모델을 제대로 제시 못 하고 있다.
게다가 우리나라 교사들은 대부분 교과서에 실린 내용 혹은 문제들에 대해서 수업 중에 거의 다루어 주어야 한다는 암묵적인 책임감을 느낀다. 또한, 가르치지 않은 것을 정기고사에 출제할 경우 수요자인 학생과 학부모가 매우 민감하게 반응하므로 최대한 학교에서 정한 교과서의 내용은 모두 수업에서 최선을 다해 다룬다. 따라서, 어려운 형식적 증명의 내용을 담은 교과서가 계속 존재하게 된다면 현실적으로 학교 현장에서 이를 무시하기는 쉽지 않다.
더불어 이러한 형식적 증명의 내용을 다루다보면 제한된 수업 시간 내에서 학생들에게 다른 방식의 정당화를 다룰 기회를 제공하기도 어렵다. 따라서, 학생들의 주된 학습은 증명의 내용에 대한 암기에 초점이 맞춰지며 이 과정에서 수학적 흥미를 잃게 될 확률이 높을 뿐 아니라 교육과정에서 추구하는 문제 해결의 아이디어를 창의적으로 생산하는 경험의 기회도 줄어들게 된다.

둘째, 중학교 기하 교육의 현 실태에 대한 것이다.

수학교사들은 중2 수학에서 다루는 내용이 다른 학년의 내용에 비해 어렵기도 하거니와 분량면에서도 상대적으로 많다고들 한다. 유한소수, 무한소수를 다루는 것도 쉽지 않고 특히 기하 단원에서는 직관적으로 알 수 있는 내용들도 모두 어려운 말로 써 내려가야 하니 학생들로서는 좀처럼 흥미를 갖기가 어렵다.
2009 개정 교육과정의 교수 · 학습방법에서는 수학적 추론 능력을 신장시키기 위하여
(1) 귀납, 유추 등을 통해 학생 스스로 수학적 사실을 추측하고, 이를 정당화할 수 있게 한다.
(2) 수학적 사실이나 명제를 분석하고, 수학적 관계를 조직하고 종합하며, 학생 자신의 사고 과정을 반성하게 한다.
(3) 수학적 추론을 통해 합리적으로 사고하는 능력을 키우고, 일상생활에서 자신의 의견을 정당화할 때 적절한 근거에 기초하여 논지를 전개할 수 있게 한다.

라고 제안한다. 하지만, 학생들 입장에서는 다양한 정당화의 모델이 제시되지 못 한 상황에서 형식적 증명만이 주로 제시되는 수업에 처하게 되고 이로 인해 기하 교육이 추구하는 본질에 닿기는커녕 그 주변만 맴돌기 마련이다. 학생들에게 삼각형, 사각형은 초등학교 때부터 익숙하게 다루어 온 대상이므로 그 성질들도 매우 직관적인 관찰이 가능하다. 그런데, 중학생이 되어서 직관은 무시당하는 경우가 다반사이고 오히려 직관은 수학적이지 못 한 것, 가정으로 출발하여 결론에 이르는 그럴 듯한 형식을 취할 때 비로소 수학이라 인정받는다고 오해한다.
수학의 새로운 발견은 사실 직관으로부터 출발한다고 해도 과언이 아닐 텐데 그 싹부터 아예 잘라내고 있는 상황이 벌어지고 있는 것은 아닌지 우려된다. 이 또한 교육과정과 교과서가 강력한 영향력을 행사하고 있는 우리나라에서는 크게 생각해 볼 문제이고 이러한 것들을 긍정적인 방향으로 유도하기 위해서는 교육과정이 명확한 선을 그어줄 필요가 있다고 여겨진다.

다음으로 공학도구의 사용에 대해서 언급하자면 이론적으로 공학도구 사용의 필요성에 대해서는 교사 모두가 긍정적이라고 할 수 있지만 현실에서는 어려움이 존재한다. 한 번이라도 교사 시범으로 계산기나 기하 프로그램을 사용한 경험이 있는 교사라면 준비하는 번거로움에 비해서 학생들이 느끼는 효과가 미미하다는 것에 금방 공감할 것이다. 그렇기 때문에 학생 한 사람 한 사람이 이러한 도구들을 다루게 하고 싶지만 학생들에게 계산기를 제공하는 예산 차원의 문제라던지 공학도구를 다루는 수학적 목표를 달성하기 위해 그 공학도구에 익숙해지도록 학생들을 교육하는 문제에 부딪히면서 야무지게 꾸었던 꿈을 포기하기 쉽다. 또 아직은 평가에서 계산기를 사용하는 것이 거의 불가능하기 때문에 수업 시간에 계산기나 공학도구를 사용하는 것에 대한 동기 유발이 현저히 떨어지게 된다.

셋째, 개선 방안에 대한 것이다.

수학 교과서에서 기하의 내용을 전개할 때는 보다 다양한 정당화의 방식을 다룰 것을 제안한다. 이는 연역적 추론까지도 포함하는 것인데 한 가지 방식만을 다루지 않고 다양한 정당화의 방식을 다룸으로써 교사들과 학생들에게 기존의 수학 교육에 비교되는 모델을 제시할 필요가 있기 때문이다. Coe & Rutheven(1994)에 의하면 증명에도 경험적인 정당화와 약한 연역적 증명, 강한 연역적 증명이 있으므로 학생들이 어려워하는 '강한 연역적 증명'은 고등학교 과정에 맡기고 초등학교와 연계한 직관적인 수학내용으로 출발해 약한 연역적 증명을 포함한 다양한 정당화의 방식으로 교과서의 내용을 구성해야 한다고 생각한다. 하지만 교과서 제작 지침에 명확히 지시하여 약한 연역적 증명이라 할지라도 절대 교과서에서 제시하는 주된 방식이 되어서는 안 되고 반드시 다양한 정당화의 방식을 다룰 것을 명시하여야 할 것이다.

또, 수학 교과서의 문제 유형을 다양하게 개선할 것을 제안한다. 현재 우리 수학 교과서에 실린 문제는 과거의 교육과정 하에 제작된 교과서의 문제와 대동소이하다. 물론 서술형 문제 등이 추가로 들어오긴 하였지만 이를 떠나 기하 문제로서 좀 더 다양한 문제 해결 방법을 찾아보게 하고 다양한 정당화를 학생 스스로가 시도해 볼 수 있는 질 좋은 문제들을 개발하여 싣는 것이 바람직하다.

다음으로 미디어 등의 다양한 전달 방식을 통해 사회적 인식을 넓혀야 한다. 교육과정이나 교과서에 제시되어 있는 내용이더라도 교사가 교수학적 누스페어[33]로부터 받은 영향에 의해 생긴 신념 등으로 수업 시간에는 다루지 않는 경우도 있었다(배수경, 2015). 따라서, 교육과정이나 교과서에 명시하는 일보다 더욱 중요한 것은 다양한 매체를 통해 수학 교육이 지향하는 바를 알려 학부모와 학생 및 교사들의 신념 등에 영향을 줄 필요가 있다.

마지막으로 공학도구의 사용에 대해서는 컴퓨터 수업과 연계한 융합 교육을 교육과정에 제시하여 컴퓨터 수업 시 수학 수업에 필요한 공학도구의 기능들을 익히고 수학 시간에는 그

33) 원래 누스페어(noosphere)는 noo(정신)와 sphere(시공간)를 결합시킨 용어로, 집단지성이 사이버 공간에서 형성한 세계를 의미한다. '교수학적 누스페어'는 이러한 누스페어와 구분하여 사이버 공간을 포함하여 어떤 종류이건 가르치는 일에 대한 성찰이 이루어지는 모든 정신적 공간을 의미한다. 교수학적 변환론을 기반으로 한 이 개념은 교수학적 체계와 사회가 교차하고 학부모, 학자, 결정권한이 있는 교육가와 같이 발언의 주체가 있는 공간이다. 이곳은 교수학적 기능을 사유하는 영역으로서 사회가 요구하는 것으로 인해 발생하는 문제들에 대항하는 모든 것들이 존재함으로써 갈등이 발생하고 협상이 이루어지며 해결책을 찾아내는 곳이 된다.

기능들을 바탕으로 수학적인 탐구가 이루어지도록 하는 방법을 제안한다.

이상의 작은 바람들이 하나씩 이루어질 때 비로소 기나긴 수학교육 과도기의 터널을 벗어나 진정으로 기하 교육이 나아갈 바를 지향하게 될 것이라 생각하는 바이다.

참고문헌

김정하 (2010). 초등학생의 수학적 정당화에 관한 연구. 박사학위논문. 이화여자대학교.

배수경 (2015). 중등수학교사의 수학적 지식의 교수학적 변환에 관한 연구. 박사학위논문. 이화여자대학교.

우정호 (2007). 학교수학의 교육적 기초. 서울대학교출판부.

Coe, R. & Rutheven, K. (1994). Proof practices and constructs of advanced mathematics students. British Educational Research Journal, 20(1), 41–53.

Tall, D. (1991). Advanced Mathematic thinking Kluwer Academic Publisher(류희찬 외 역 (2007). 고등 수학적 사고. 경문사).

공학도구 이용 방안에 대한 논찬문

고상숙(단국대학교 수학교육과 교수)

발제자께서는 우리나라 학교현장에서 공학도구 활용방안에 대해 교육과정을 기초로 하고 교과서의 사례들을 찾아 묘사하여주셨고 각 수학영역에서 어떤 공학도구가 사용되고 있는지를 기술하셨습니다. 공학적 도구의 역할로는 학습보조수단, 이해함양수단, 수학적 탐구수단으로의 활용으로 분류될 수 있으며 각 역할에 따라 적용사례를 제시하였습니다. 더 나아가 미국, 영국, 싱가포르, 독일, 핀란드, 일본 등이 공학도구 활용에 대해 어떻게 대처하고 있는지를 조사하였습니다. 그리고 발제자는 말미에

– 수업이나 평가에 필요한 계산기 등의 공학적 도구가 준비되어야 한다(공학적 도구와 관련된 선행연구나 외국의 사례들을 다시 한 번 검토해 볼 필요가 있다).
– 초등학교 5학년부터 수학교과 수업시간에 계산기를 적극 이용해야 한다. 특히, 통계와 관련된 수업은 계산기나 그래픽계산기 등의 공학적 도구를 적극 사용해야한다.
– 평가에 계산기가 이용되어야한다. 우선 학교 수행 평가나 내신 평가에서 이용하도록 하고 장기적으로는 수능에서도 이용하는 방법을 고민할 필요가 있다. 이러한 주장은 새로운 주장이 아니며 이미 2009 개정 교육과정은 수학의 모든 과목의 평가에서 “수학 학습의 평가에서는 평가하는 학습 내용과 방법에 따라 학생에게 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구와 다양한 교구를 이용할 수 있는 기회를 제공한다.”고 명시하였다. 이를 실천하기 위한 노력이 필요할 뿐이다.
– 또한 계산기뿐만 아니라 다양한 공학적 도구가 수업과 평가에서 활용되어야한다.

이상과 같이 주장하며 마무리를 하였습니다. 지난 5월 2일에 발표된 2015년 수학과 교육과정 시안을 살펴보면 6가지 핵심역량이 제시되었는데 “정보처리능력”이 포함되어 이제 공학도구 활용에 따른 능력개발이 수면위에 떠오른 중요한 이슈가 되었습니다. 이러한 시대적 요구에 위에 제시된 발제자의 주장은 모두 의미가 있으며 필요한 사안이라고 여겨집니다.

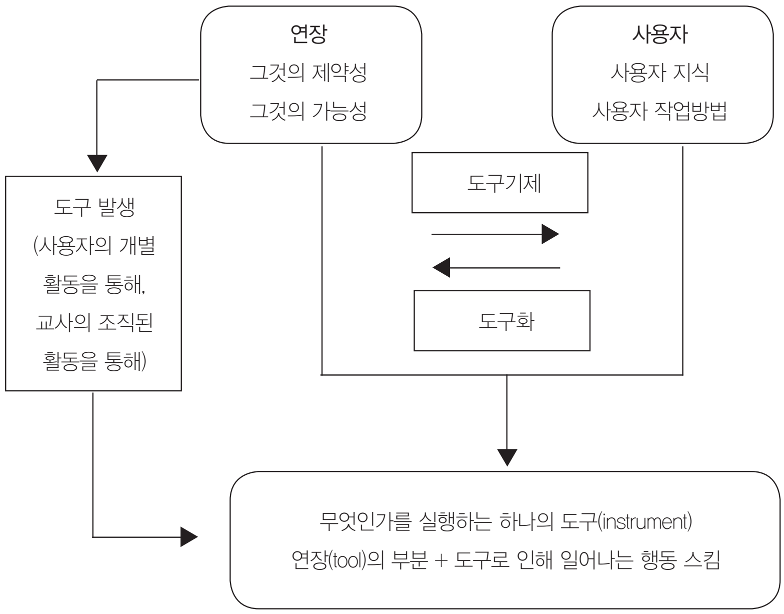
논찬자 개인적인 경험을 잠깐 말씀드리자면 공학도구에 활용을 미국이 적극적으로 도입을

시작할 때인 90년대 말에 '공학도구 활용한 환경에서 학생의 기하적 사고력 신장'에 대해 연구하여 박사학위논문을 받았고, 교사교육에 재직한 이후 줄곧 '테크놀로지와 수학교육'이라는 강좌를 지속적으로 강의하며 미래 교사들의 현장 활용을 위해 노력해오고 있습니다. 이런 꾸준한 노력에도 불구하고 그동안의 경험에 비추어보면 국제평가에서도 공학도구활용이 이루어지고 있는 현시점에서도 여전히 논찬자의 마음은 무겁게만 느껴집니다.
우리나라는 IT 강국임에도 불구하고 학교현장에서 공학도구의 활용에 대해선 발제자가 조사한 내용에서 알 수 있듯이 여전히 겉만 맴돌고 있습니다. 제 7차 교육과정이후 공학도구 활용은 언급되지 않은 적이 없고 금지된 적도 없습니다. 2015년 교육과정에도 강조되었다고 해서 발제자의 글에서 알 수 있듯이 현장 적용성이 적극적으로 추진되고 안내되지 않으면 앞으로 교육현장이 변화되리라 예측하기 어렵습니다. 한편 발제자도 언급하였듯이 평가에서 공학도구의 활용이 지원되지 않기 때문에 현장에서 공학도구의 현장적용성에 제약이 큽니다. 이젠 적극적으로 이를 고려해야하는 시기임을 상기하여야 합니다. 이 점에 대해서도 본 논찬자는 최근 그 중요성을 인식하고 공학도구를 활용할 때 평가를 어떻게 할 수 있는지에 대해 꾸준히 연구하여 발표하였습니다.
또한 논찬자는 일찍이 2005년 출간한 저서의 서두에서 다음과 같은 조건이 만족된다면 학교현장에서 공학도구의 활용은 학생의 경험에 매우 효과적임을 시사하였다.

1. 사용자는 주어진 테크놀로지로 무엇을 해내길 원하는지, 그리고 어떻게 테크놀로지가 그들을 도울 수 있는지를 잘 알고 있어야 한다. 즉 테크놀로지가 지니고 있는 각 기능을 잘 숙지하여 그 목적에 맞게 사용하여야 한다.
2. 테크놀로지 활용이 단순히 교육과정에 더해지는 것이 아니라 교육과정에 주의깊게 잘 통합되어야 한다. 즉 테크놀로지에 의한 새로운 교육과정의 접근이 가능하다.
3. 무엇보다 중요한 것은 모든 활동의 초점이 하드웨어나 소프트웨어에 관해서가 아니라 수학적 지식에 관한 것이어야 한다는 것이다. 이 점은 수학교육과 컴퓨터 교육의 차이점을 나타내는 것이기도 한다.

위의 1에서 언급된 도구의 특성에 대해 Trouche(2004)는 아래 그림 1과 같이 학생이 행동스킴을 형성한다는 것을 도식화하였다. 이 때 학생이 수학적 사고력 신장에 긍정적인 행동스킴을 형성하게 돕고 안내하는 것은 우리 수학교육자의 몫이다.

[그림1] 학생의 도구 발생(Trouche, 2004; 고상숙 외, 2012 재인용)



또한 같은 저서에서 '수학교육에서 테크놀로지의 활용영역'으로 첫째, 훈련과 개인지도, 둘째, 컴퓨터 보조 교수, 셋째, 프로그래밍, 넷째, 역동적 상호작용 환경으로 구분하여 각 영역에서의 수행되었던 연구들을 제시하였다. 이들을 간단히 요약하면 다음과 같다.

훈련과 개인지도 : 컴퓨터 사용에 대한 초기의 토론은 일반 강의를 강화하고 전통적 교수를 지지하기 위해 사용된 컴퓨터에 대한 것이 주로 많았다(Olive, 1992). 부가적으로 다른 개인지도용 소프트웨어가 개발되고 사용되었으며 그 영향이 조사되었다. 테크놀로지와 학습이라는 제목 하에 대부부의 연구는 특별하게 만들어진 소프트웨어를 반복적으로 사용하여 학생이 특별한 기능을 획득했는지를 조사하였다. 여러 연구의 결과로는 학습자의 태도나 수행에 테크놀로지의 효과는 상대적으로 약하다고 보고되었고 더욱이 이 연구는 학습자의 인지에 대한 정보는 거의 제공하지 않았다.

컴퓨터 보조 교수 : CAI(Computer-Assisted Instruction)라고 불리는 컴퓨터 보조교수 소프트웨어는 미리 개발된 프로그램에 학습자가 입력하는 정도를 제한하는 컴퓨터화한 학습 환경을 만들었다. 그런 교수 프로그램은 질문에 답하게 하고 그들의 결과를 즉각적으로 컴퓨터가 채점하여 제공할 뿐만 아니라 학생에게 설명적 문구와 그래프를 제공하였다. 많은 교육자들은 이를 또 다른 형식의 반복과 훈련이라고 평가하였다. 주로 그런 환경이 일반 교실 수업을 보조하였을 때 학생의 습득이 이루어졌다고 주장하였으나 결과는 CAI가 전통적

인 수업을 대신하였을 땐 혼합된 주장을 하였다(Kinnaman, 1990).

프로그래밍 : 학생이 프로그램과 그래프를 통해 수학적 성질을 발견하게 함으로써 교실 수업의 질을 향상시킬 수 있는 효과는 학습자가 활발하게 지식을 구성하게 하는 피아제의 학습 이론을 바탕으로 LOGO를 개발한 Papert(1980)의 경우가 이에 해당된다. 이런 견해는 한편으로는 수학교실에서 프로그램을 사용하기 위해 과외의 노력을 감수해야하며 다른 한편으로 학습자의 수학적 개념과 기술, 세부적이거나 일반적인 문제해결력의 획득의 효과에 관한 연구에 대한 새로운 장을 열었다.

역동적 상호작용 환경 : 위에서 언급된 LOGO와 같은 프로그램이 소개되면서 탐구활동을 가능하게 하고 학생에게 능력을 실어주는 사고의 조력자 또는 지적인 도구로 보는 관점이 수학교육 공동체에서 도구의 사용에 대해서 팽배하게 되었다. 이런 인식은 수학적 도구 세트와 촉매의 역할을 하는 소프트웨어 등이 다양하게 개발되는 계기가 되었고 탐구 중심적인 마이크로 월드가 봇물처럼 쏟아져 나오게 되었다. 이런 컴퓨터화한 학습 환경의 목적은 탐구학습을 가능하게 하고 학생에게 추측하고 문제해결을 위한 기회를 제공하는 것이었다.

이상에서 요약된 각 영역에서의 공학도구의 활용은 연구들의 결과가 항상 긍정적인 것이 아닐지라도 사용자와 도구 간에 활발한 상호작용에 의해 매우 효과적일 수 있음을 시사한다.

우리 수학교육자들이 모두 인식하고 있듯이 미국은 1989년 발표한 학교수학의 규준집에 컴퓨터를 포함한 공학도구의 사용을 의무화하였음에도 급속한 기술공학의 발전으로 인해 2000년 원리와 규준이라는 규준집을 다시 발행할 정도로 기술공학의 도입에 민감하게 반응하고 실천하고 있다. 이에 비해 우리나라는 1997년에 발표된 7차 교육과정부터 공학도구의 사용을 언급하고는 있으나 여전히 계산기 등의 사용에 부정적이며, 소프트웨어 등 공학적 도구를 사용할 수 있는 학교의 시설은 열악하다. 그나마 교단선진화 정책에 힘입어 신설학교나 연구학교 중심으로 수학교실이 마련되고 있지만 공학도구 사용에 대한 추진능력은 매우 미약해보이며 앞으로도 그리 밝게 보이지 않는다.

여기에는 공학도구의 이용에 대한 교사교육의 미진함이 그 한 예로 꼽을 수 있다. 2014년 중반에 대한수학교육학회를 중심으로 사범대학에서 공학도구를 활용한 강좌에 대해 조사가 이루어진 바가 있다. 이 때 전국 사범대학에서 테크놀로지 강좌를 개설하고 있는 사범대학은 10%~15%미만이었다. 이는 공학도구 사용에 열의가 있어도 학교현장의 시설이 열악하여 활용할 수 없다라고 말하는 것보다는 수학교사들이 테크놀로지의 효과를 사용해본 적이 없기 때문에 학교현장에 시설이 갖추어진다고 해도 활성화되는데 또 다른 시간이 더 필요하다는 것을 암시한다. 왜냐하면 모든 정책은 교사들의 필터링에 의해 좌지우지되기 때문에 교사교육이 선행 또는 병행되지 않으면 거의 불가능하다고 보여진다.

본 논찬자는 우리 수학교육계가 다음과 같은 중요한 사안들을 꾸준히 개선해나가야 현장교육에서 공학도구의 활용이 효과적으로 이루어질 것임을 천명하며 마무리하고자 합니다.

1. 교사양성기관인 교육대학과 사범대학에서 테크놀로지 강좌를 통해서 공학도구 활용에 대해 교사교육이 의무화되어야 한다.
2. 외부기관의 도움이나 사회적 인프라를 통해 학교 교육 현장에 공학도구와 시설이 수학교실을 중심으로 확충되어야 한다.
3. 수업에서 활용뿐만 아니라 평가에서도 공학도구 활용을 교육부가 적극적으로 안내하고 추진하여야 한다.
4. 연구를 바탕으로 계산기의 도입 시기를 결정하여야 한다. 논찬자 개인적으로는 계산능력을 키우는 시기이후인 초등학교 3학년부터 수학적 사고력신장을 위한 의도된 활동에서 공학도구 사용이 권장되어야 한다.

참고문헌

고상숙 (2005). 수학을 하려면 엑셀을 밟아라. 서울: 경문사.

고상숙, 고호경, 박만구, 한혜숙, 홍예윤(2012). 수학교육평가론. 서울: 경문사.

Kinnaman, D. E. (1990). What's the research in telling us? Classroom Computer Learning, 10, 31-39.

Olive, J. (1992). Technology and school mathematics. In W. Secada(Ed.), Reform of school Mathematics in the U.S.(pp. 503-516). A Special Issue of the International Journal for Educational Research.

Papert, S. (1980). Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas. New York, NY: Basic Books.

Trouche, L.(2004). Managing the complexity of human/machine interaction in a computerized Learning Environ-ments : Guiding Students' command process through instrumental orchestrations. International Journal of Computers for Mathematical Learning 9, 281-307.

"V. 학교 수학과 평가 개선 방안"에 대한 검토 의견

김두정(충남대학교 교육학과 교수)

안녕 하세요! 절실한 우리 교육의 현실을 논의하는 귀중한 자리에 함께 하게 되어 매우 보람되고 의미 있는 일로 생각합니다. 컨퍼런스 발표 자료 내용은 평가 부분뿐 아니라 전체적으로 구구절절 동의하는 내용이 매우 많습니다[1]. 토론자는 약 30년 전(KEDI 연구보고 RR88-27, 1988). 교육개발원에서 일하며 47개국의 학교 교육과정의 학습량을 우리나라와 다른 나라를 비교한 적이 있습니다. 그런데 어쩌면 그 때의 연구 결과와 지금의 비교 연구 결과가 그대로 일까요? 변하지 않은 우리나라 학생의 학습량 과다 문제를 확인할 수 있었습니다. 그 때, 교과서를 중심으로, 독일의 초등 3학년 수학 교육 내용과 우리나라 초등 3학년 수학 교육 내용을 비교한 바, 독일 교과서의 단원수가 우리나라 교과서 단원수의 반 정도였으며 소단원, 내용 요소 수준까지 살펴보니 독일의 교과서는 다시 내용 범위가 훨씬 좁았습니다. 이번 발표에서도 독일 초등 3학년 수학과는 7개 중단원인데 비해 우리나라 중단원은 14개입니다. 일단 2배가 아닙니까? 게다가 일치하는 7개 중단원의 교육 범위도 우리나라보다 훨씬 넓습니다. 그러면, 전체적으로 몇 배가 되는 것입니까?

학습량 과다 문제는 수학과에만 국한된 문제가 아닙니다. 전 교과에 걸쳐 있으며 심한 과다 교과 중에는 역사 교과가 있을 것입니다. 전 교과에 걸쳐 학습량의 과다는 심각하고 그래서 학생의 입장에서 학교에서 제대로 배우기에는 수업 시수가 부족하고 개인적으로 사교육이 필요할 것으로 봅니다. 더구나 학교에서는 낮은 수준의 과제를 배우기에도 시수가 부족하니 높은 수준의 과제를 배울 시간이 없을 것입니다. 이런 상황에서 평가 받는 학생의 고통은 헤아릴 수가 있을 것입니다.

---

1) 몇 가지 예를 들면, 우리나라 교육 내용은 다른 나라와는 달리 인접 학년 간 내용 중복이 없어서 학습량이 증가가 가속화 된다거나, 교과서 단원이 내용 위주의 교육과정 단원을 그대로 따라 학습 흥미 저하와 학습량 증가를 가져오고 있다는 것이나, 내용을 줄이라고 했더니 성취기준들을 몇 개 합쳐 복합적 성취기준을 만들어 무늬만 감축이고 학습량의 실질적 변화는 없는 것 등이다. 목표, 성취기준, 내용, 기능 등을 통합적으로 조율하며 실질적으로 교육 내용을 줄여야 할 것이다. 그래야 국제 경쟁력 있는 높은 수준의 학습과 학생의 정의적 태도가 고양될 것이다.

언급한 바와 같이, 발표 내용을 읽고 전반적으로 수학과 평가의 문제점과 해결 방안에 대하여 매우 동의합니다. 핵심 문제로는 평가 목표가 내용 위주의 학습 목표의 실현이 아니라 등급매기기의 상대평가에 있다는 것이며, 이를 해결하기 위해서 문제 풀이식 내용위주의 수학과 내용 대신, 수학적 과정과 역량을 주요한 교육 목표와 내용으로 취급하여 출제하고 포함하는 수능 및 내신 시험과 수학 교과서를 만들어야 하며 이를 준비하고 실행할 교사에게 실질적인 평가권을 부여해야 한다는 것입니다.

그런데, 발표 내용에 대하여 토론자가 한 가지 지적하고 싶은 바는 발표자가 평가의 문제를 평가 방법의 개선으로 풀고자 하며 근본적으로 수학과 학습 목표, 성취기준, 내용, 기능을 종합적으로 포함한 수학과 교육과정의 개혁을 심각하게 고려하지 못하고 있다는 것입니다. 수학과 학습량 과다의 문제와 낮은 수준의 과제에 집중하는 문제는 단순히 평가 방법의 개선으로 가능한 일이 아니라 근본적으로 평가 기준이 되는 교육과정—수학과 교과 목표, 성취기준, 내용, 기능, 태도 등의 연결과 통합—의 명료화로 해결될 수 있다는 것입니다. 수학과를 가르치는 교사가 어떻게 가르칠 것인가의 문제보다 우선적으로 무엇을 가르쳐야 할 것인가의 문제를 명료하게 알아야 할 것입니다. 명료한 수학과 교육과정의 부재로, 우리나라 수학과의 교사들은 아직도 발표자가 인용한 높은 수준의 수학적 과제(PWC, 사고력, 문제해결력, 추론, 의사소통 등)를 중요한 수학 공부로 생각하지 않는 것은 아닐까요?

토론자가 말씀들일 주요한 요지는 이미 언급했고요, 좀 더 구체적으로 발표 내용을 읽고 생긴 일반적인 생각과 세부 내용에 대한 의견을 나열하여 말씀드려 보겠습니다.

I. 발표 내용에 대한 일반적인 견해

1. 서술형 평가든, 논술 평가든, 정의적 영역 평가든, 태도 평가든, 역량 평가든 평가하고자 하는 것(목표, 성취기준, 내용, 기능, 태도 등)을 모두 교육과정에 분명하게 포함하여 정식 "공부"로 삼고 수업한 후 행해야 한다. 교육 평가의 문제는 우선 평가 방법의 문제가 아니라 평가 대상 즉 교육과정의 문제이다. 교사는 평가 방법을 선택하거나 만들기 전에 무엇을 가르쳐야 하는지를 먼저 똑바로 알아야 한다. 그것이 우리 수학 교육의 급선무이다. 그래야 창의적이고 자율적이고 전문성 있는 수업 활동을 전개시킬 수 있으며 평가 또한 전문적이고 자율적이고 창의적으로 할 수 있다.

2. 세상의 평가는 주관적이다. 교사를 포함한 교육 평가자의 주관성을 인정해야 한다. 이것

은 교육 전문성을 인정하는 세계 "교육 선진국"의 주 경향이다. 줏대 없고 모호한 평가보다 주관적이나 일관성 있고 타당하고 신뢰로운 평가를 교사가 만들어 가야 한다. 그래야 평가 전문성이 쌓인다. 교사의 평가 전문성이 쌓이도록 교육부, 교육청, 학교 등 교육 공동체는 교사에게 시간, 연수, 예산 등의 지원을 아끼지 말아야 한다. 평가 방법에만 지나치게 집중하기보다 왜, 무엇을 평가할 것인가를 깊이 생각하고 논의하는 기회가 교사에게 주어져야 한다.

3. 일찍이 Madaus(1988)에 의하면, 전 세계는 지나친 교육 평가 결과에 대한 강조로 사회와 세상이 왜곡되어 있다. 즉, 평가가 교육과정을 거꾸로 결정하는 주객전도 현상, 잘못된 줄 알면서도 시험과 평가 결과를 믿는 학습자, 교육기관, 교육자의 변화된 신념과 철학 등이다. 그래서 협동보다 경쟁(승리)을 중시하는 교육이 당연시 되었으며, 교육이 협동이 더 중요한 사회 발전에 저해가 될 수 있으며, 거꾸로 교육이 경제와 정치에 오히려 악영향을 끼칠 수 있다.

4. 학생과 교사의 역량을 키우는 것 보다 평가와 인센티브를 수단으로 교육하는 것이 보편화 되어 있다. 학교는 학생 역량이 길러주는 곳이 아니라 경쟁을 통해 평가 받는 곳이 되고 있다. 평가(학습) 목표-인센티브와 함께 교사/학교/교육청/교육부가 공유하는 가치를 갖고 모두(교육 공동체)의 역량 구축에 나서야 한다(Fullan, 2007). 그래서 학생의 수학적 역량 개발에 나서야 한다. 교사 혼자만 나서서 학생의 역량 개발을 하는 것은 불가능하다. 교사-학교-교육청-교육부는 수학과 전문 학습 공동체로 함께 노력하며 책무성도 함께 논의되어야 한다.

5. 학교 수학과 대학 수학을 지나치게 구분하여 규정하고 있는 것은 아닐까? 한다. 지나치게 분절적이고 정답 있는 수준의 혹은 범위의 수학만을 학교 수학에서는 가르치지는 않는지? 우리의 수학과 교육과정은 어떤 면에서 영재 훈련 프로그램, 특목고 과목, 이번에 시도되는 실용 수학을 오히려 닮으면 어떨까? 또, 획일적이고 단기간 의 평가로 학교 수학 평가는 교사의 평가 재량(권)도 주지 못하는 것은 아닌가? 또, 대학 수학과 학교 수학을 연결하지 못하는 게 현재의 교사 교육이 아닌가?

6. 우리나라에서 사교육이 번성할 수 있는 원인은 교육과정 상 높은 수준의 공부를 공교육에서 포함 하지 않아서 학교에서 하지 않는 선행 학습이 가능하기 때문으로 보는 것은 타당해 보인다. 영재 교육 또한 선행 학습으로 본질상 일반 교육과 차이 없이 대학 입시 경쟁에서 유리한 위치에 있다고 보는 것도 타당하다.

Ⅱ. 세부 발표 내용에 대한 의견

1. 수학 교사는 수업이나 평가에 앞서 수학과 교육과정을 깊이 알아야 한다. 그러자면 전제조건으로 수학과 교육과정은 교과 목표, 학습 목표, 성취기준, 내용, 기능을 연결하여 명확하게 진술되어야 한다. 수학과 교과서는 학생용이며 수업용이지 직접 교육과정은 아니다. 그러므로 현장 교사는 1차적으로 교수방법과 평가에 앞서 교육과정에 관심을 가져야 한다. 교육과정을 해석해야한다는 의미에서 수학과 교과서 저자와 교사는 동일한 위치에 있다.
그래서, 평가 방법에 우선하는 중요한 일은 평가 기준이 무엇인가를 교육과정으로 명확하게 규정하고 이를 교사가 충분하게 이해하는 일이다. 그런 후에야 어떻게 평가할지를 논의할 수 있다. 수능과 학교 내신 평가 그리고 국가 수준 학업 성취도 평가의 기준은 EBS교재나 출제자의 재량이 아니라 교육과정이어야 한다.

현장에서 교사들이 가장 관심을 갖고 있는 부분이 교수방법과 평가에 대한 실천 방법일 것이다. 교육 방법과 평가는 수학과 교육 목표와 밀접한 관계를 가지기 마련이다.

교육과정은 수학의 학문적 특성을 고려하여 5개 영역으로 구분하더라도 교과서는 학습자의 특성을 고려하여 통합적으로 구성해야 합니다.

지금 시점에서 가장 먼저 해야 할 일은 교사들이 교과목의 성격에 맞게 적절한 평가 방법을 선택하고 시행할 수 있도록 평가시스템을 만드는 일이라고 본다.

각각의 평가 방법은 교육과정에 제시된 다양한 교수 방법과, 학생들의 학습 과정을 반영할 수 있어야 하고, 신뢰할 수 있는 타당한 정보를 제공해야 한다.

2. 교사의 교육과정 재구성 권한(이는 교육과정 명료화로 가능하다)과 그에 입각한 평가권을 법에 명시함이 필요하다(이는 현 상황에서 선행 교육 규제법보다 더 필요해 보인다). 그래서 현재의 상대 평가(예, 수능 1등급) 관련 문제점과 학습량 과다의 문제도 상당히 해결할 수 있다고 본다.

객관적이고 신뢰도 높은 평가가 이루어지기 위해서 교사에 대한 실질적 평가권 부여는 더욱 필요하다. 여기서 '실질적 평가권 부여'라 함은 법적으로 교사의 평가 권한과 책임을 명시함을 뜻한다.

3. 학생을 기른 사람이 학생의 질을 가장 잘 알고 평가할 수 있다. 당연히 교사는 학생의 대학수학능력도 가장 잘 안다. 대학수학능력 시험은 대다수의 나라처럼 고교 졸업자격 시험으로 바뀌고 내신 성적과 함께 균형적으로 대입전형자료로 활용되어야 한다. 두 시험 모두 가르친 교사가 주축이 되어 출제되어야 한다. 교육부와 교육청은 이런 평가를 위한 교사와 학교의 역량을 구축하는데 함께 노력해야 한다.

학교 현장에서의 평가를 중시하려면 대입 전형요소 중 내신 성적의 실질적인 반영률을 높일 필요가 있다

내신에서 수치로 표현되는 정보는 평균과 원점수 정도만 제공하고 성취기준과 정의적 영역에 따른 평가 기준에 따라 지도한 학생의 수학적 능력을 글로 써 주고, 대학에서는 면접을 통해 기록의 사실 여부 정도를 파악하여 학생을 선발했으면 한다. 이러한 제안이 현실화 되려면 교육 주체들이 참여하는 독립된 공식 기구가 필요하다

4. 수학과 수업은 정답이 있는 공부(설명, 해석, 내용 적용)에 치중하는 한편 정답 없는 공부(PWC, 문제해결력, 의사소통, 표현 등)는 별로 하지 않고 있다. 발표자에 의하면 후자를 우리나라 고교수학 교과서 문제는 6%만 포함한다고 한다. 이의 개선 방안도 교육과정의 명료화이다.

High-Level의 과제는 학생들의 이해력 및 사고력을 길러주고 문제해결력, 추론능력, 의사소통능력 등을 향상

5. 정의적 영역의 성취를 높이기 위해서 별도의 노력을 기울일 것이 아니라 수학과의 내용을 감축하여 학생에게 의미 있고 수준 높은 학습과 자기 주도적 학습을 가져오고, 그것들을 통한 학생의 자기 효능감을 고양시켜야 한다.

Ⅲ. 결어

사회적으로 여론이 비등하는 우리의 수학 교육 문제는 학습량의 과다와 학습 의욕 상실로 "수포자"의 양산이라는 것이다. 특히 대학 입학과 관련하여 문제점을 보면 수학과 관련이 적은 전공 분야의 선발에서도 수학 성적이 큰 비중으로 결정한다는 것이다.

이의 해결을 위해서는 낮은 수준 과제 위주의 내용을 줄여서 국제적으로 경쟁력 있는 진짜 공부를 하고 학생의 효능감을 회복하여 정의적 성취를 높이는 일이다. 교육 내용을 줄이는 방법은 수학과 교육과정을 명확하게 하고 교사의 "교육과정 문해력"을 높이는 일이다. 교육과정의 명확화는 교과목표–학습목표–성취기준–내용–기능 등을 연결하여 가르칠 것을 분명하게 하는 일이다. 교육과정은 교과서 집필, 수능/학교시험/일제고사 등의 출제 기준이 되고 수업의 기준이 되어야 한다.

교육과정 구성과 실행 관리는 또한 학교 평가 및 교육청 평가 그리고 교육부 평가의 중요한 기준이 되어야 한다. 말하자면 교육 공동체의 협동이 중요하다. 학교 교육의 성과는 학생의 학업 성취이기 때문이다. 바람직한 지덕체에 걸친 학습자의 결과를 실현하기 위해 교육부–교육청–학교–교사는 공동 협력하여 교육과정 구성과 실행을 위해 무엇을 하였는지 총체적으로 평가되어야 할 것이다. 교육과정 실행의 성패를 교사 혹은 학교만의 책무로 돌릴 수 없음이 교육 개혁에 관한 연구들은 강변하고 있다.

참고문헌

김두정 외(1988). 학교 교육과정의 쟁점과 대응책. 교육개발원 연구보고 RR88–27

Fullan, M. (2007). The new meaning of educational change. New York: Teachers College Press.

Madaus, G. F. (1988). The influences of testing on the curriculum. Critical Issues in Curriculum. 87th Yearbook of the NSSE. 83~121.

학교 수학과 평가 개선 방안에 대한 논찬

조현공(한성과학고등학교 교사)

1. 이상적인 평가와 실제 학교현장에서의 평가와의 괴리

평가는 일정한 학습이 끝난 후 학생이 도달한 수준을 판정하는 기능 뿐만 아니라 학생의 학습과 교사의 수업을 돕는 것을 목적으로 한다. 전자가 평가의 결과적인 면에 집중한다면 후자는 평가의 과정에 주목하는 것이다. 과정에 주목하는 평가를 통해서 학생이 현재 무엇을 알고 있는지, 그것에서 어떤 어려움을 겪는지, 잘못된 개념은 없는지, 과제에 대해 얼마나 끈기 있게 도전하는지, 문제를 해결할 때 어떤 전략을 사용하는지 등 학생의 학습에 대한 많은 정보를 제공받을 수 있다. 그러나 실제 학교현장에서의 평가는 입시를 위한 내신성적 산출에 종속되어 앞서 언급한 목적이 실현되지 못하고 있다. 평가는 그와 관련된 사람들에게 골치아픈 대상이다. 교사는 문항의 오류와 채점 결과에 대한 각종 민원에 시달리고, 학생은 심리적 압박감, 평가 결과가 주는 자신감 저하와 부정적 자아관으로 괴로워하고, 학부모는 평가 결과에 따라 자녀의 미래가 달렸다는 생각으로 자녀에게 공부를 강요하고 교사를 압박한다. 평가와 관련한 이러한 왜곡된 상황을 개선하고 싶지만 평가가 경쟁위주의 입시, 학벌 중심의 사회구조와 맞물려 있어 쉽게 개선되기 어렵다.
평가와 관련된 현실상황을 바라보면 그것이 너무 거대한 벽같이 느껴져 우리가 할 수 있는 일이 아무것도 없어 보인다. 그러나 현재의 평가의 문제점이 무엇이고 그것을 개선하기 위해 필요한 것인지 무엇인지 냉철하게 분석하다보면 현재 내가 할 수 있는 일을 찾을 수 있을 것이다.

2. 현재의 평가에서의 문제점과 개선에 대한 제안

(1) 지필평가 위주의 평가 관행의 개선 필요
학교 현장에서 지필평가 외의 다양한 평가방법이 시행되지 않는 이유는 대략 세 가지라고 생

각한다. 첫 번째는 지필평가로도 학생들의 수학적 능력을 충분히 반영할 수 있다고 생각하기 때문이다. 두 번째는 대학입시가 지필평가 위주이기 때문에 학교에서의 평가도 지필평가 위주가 적합하다고 생각하기 때문이다. 세 번째는 지필평가가 다른 평가보다 공정성과 신뢰도 시비에 휘말리거나 학부모의 민원에 시달릴 가능성이 낫다고 보기 때문이다.

지필평가의 가장 큰 문제점은 학생의 수학적 능력을 온전히 반영하기 어렵다는 것이다. 지필평가에서 조금 낮은 성적을 받은 학생이 그렇지 않은 학생보다 의사소통능력이 더 뛰어날 수도 있고 남들과 다른 접근 방법을 잘 시도할 수 있다. 금방 해결되지 않는 과제를 끈기있게 시도하기도 하고, 다른 사람의 수학적 아이디어를 존중하고 귀담아 들으며 문제점을 예리하게 파악하기도 하며, 다양한 현상이나 자료를 수학적으로 관찰 · 조직하는 능력이 뛰어날 수도 있다. 이것을 교육과정 문서에서는‘다양한 평가 방법을 활용하여 수학 학습에 대한 종합적인 평가가 이루어질 수 있도록 한다’라고 표현하고 있으며, 교육부의 ‘2차 수학교육 종합계획’에서는 다음과 같은 예시로 설명하고 있다.

<table>
<tr><th rowspan="2">학생</th><th rowspan="2">평가요소</th><th colspan="4">평가요소별 논평 초안</th><th rowspan="2">논평</th></tr>
<tr><th>평가요소별 논평 기준</th><th>우수</th><th>보통</th><th>미흡</th></tr>
<tr><td rowspan="6">1</td><td>삼각형 작도</td><td>간단한 도형 및 주어진 조건의 삼각형을 작도할 수 있다.</td><td>○</td><td></td><td></td><td rowspan="6">크기가 같은 각을 정확히 작도하였으며(삼각형의 작도), 작도 과정을 설명하였음(수학적 표현). 작도에 대한 자신감이 생겼으며(자신감) 모둠활동에도 적극적으로 참여함(책임, 배려, 끈기)</td></tr>
<tr><td>수학적 표현</td><td>점, 선, 각의 의미를 알고 있으며, 작도 과정에서 올바르게 사용할 수 있다.</td><td></td><td>○</td><td></td></tr>
<tr><td>자신감</td><td>프로젝트 완료 후 작도에 대한 자신감이 생겼다.</td><td></td><td>○</td><td></td></tr>
<tr><td>책임</td><td>프로젝트에서 주어진 역할을 정확하게 이해하고 임무를 완성하였다.</td><td>○</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>배려</td><td>프로젝트가 성공할 수 있도록 친구들을 잘 도와주었다.</td><td></td><td>○</td><td></td></tr>
<tr><td>끈기</td><td>프로젝트가 힘들었지만 포기하지 않고 목표를 달성하였다.</td><td>○</td><td></td><td></td></tr>
</table>

지필평가의 또 다른 문제점은 주로 일정한 학습이 끝난 후 이루어지기 때문에 학생과 교사에게 적절한 교수학습 정보를 제공하지 못하는 데 있다. 수업의 과정 중에 이루어지는 과정중심 평가는 학생의 수행과 이해에 대한 교사의 피드백을 통해 교실에서 기대되거나 장려되는 행동이 어떤 것인지를 학생들이 자각하는 데 도움을 주고 학생이 현재 자기 자신이 도달(성취)하고 있는 성취 수준과 자신이 성취하고자 하는 학습 목표와의 차이를 알게 하여 그 간격을 좁히기 위해 필요한 행동을 안내해 주는 역할을 한다. 그러나 결과 중심의 지필평가는 이러한 기능을 수행하지 못하므로 학생의 학습상의 필요가 채워지지 않게 된다.

(2) 다양한 평가방법의 시행 필요

위에서 언급한 지필평가의 단점을 보완하는 대안적인 평가로 관찰, 면담, 자기평가, 동료평가, 프로젝트평가, 포트폴리오 등이 있다. 이러한 대안평가들은 학생의 다양한 수학적 능력을 파악하게 해 주며 학습의 이해 수준과 필요에 대한 정보를 수업의 과정 중에 지속적으로 제공해 주어 교수와 학습을 개선하는 데 도움을 준다. 앞에서 언급한 대안평가 중 논찬자는 관찰과 면담에 대한 연구를 2012, 2013년에 시행하였다. 그 사례에 대해 잠깐 소개하면 다음과 같다.

① 학생들이 개념이나 문제를 어떻게 접근하는 지 수업시간에 관찰하고 기록한 예

4/12

김OO 문제를 해결할 때 다른 학생이 생각하는 방향과 다른 관점에서 생각한다. 사고 과정이 유연하고 과제집착력이 뛰어나다.

최OO x, y 가 실수일 때, $x^2-4xy+2y^2$ 의 최솟값을 구하는 문제의 다음 풀이 두 가지가 왜 답이 다른지 질문함.

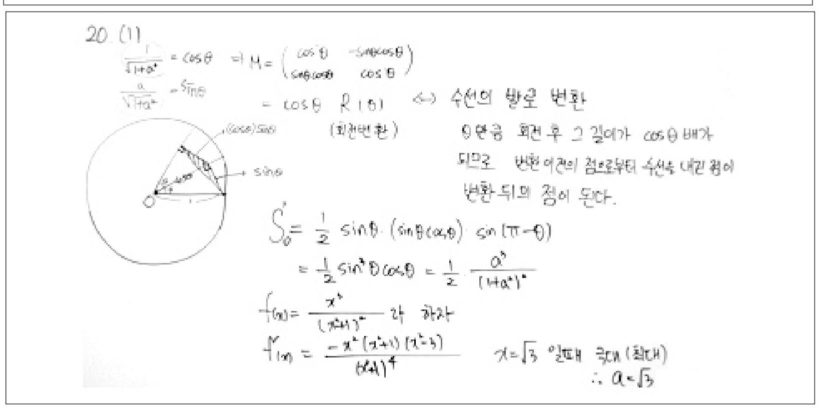
(i) $x^2-4xy+2y^2=(x-2y)^2-2y^2 \geq -2y^2$ $[\because (x-2y)^2 \geq 0]$

등호는 $x=2y$ 일 때 성립하므로 $x=2y$ 일 때 최솟값은 $-2y^2$ 이다.

(ii) $x^2-4xy+2y^2=2(y^2-2xy)+x^2=2(y-x)^2-x^2 \geq -x^2$ $[\because (y-x)^2 \geq 0]$

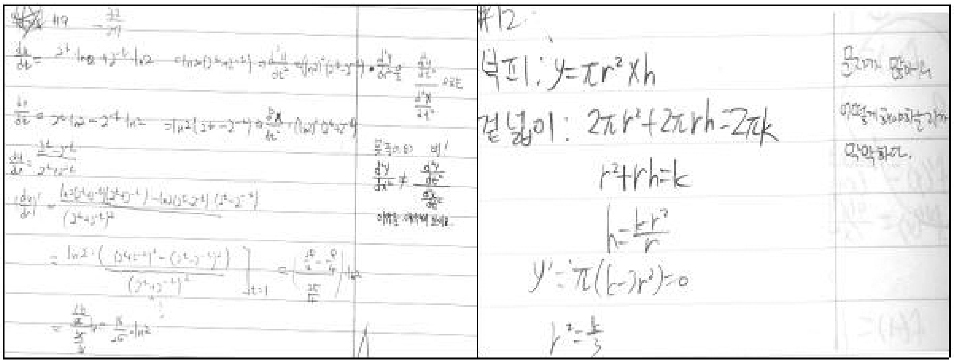
등호는 $x=y$ 일 때 성립하므로 $x=y$ 일 때 최솟값은 $-x^2$ 이다.

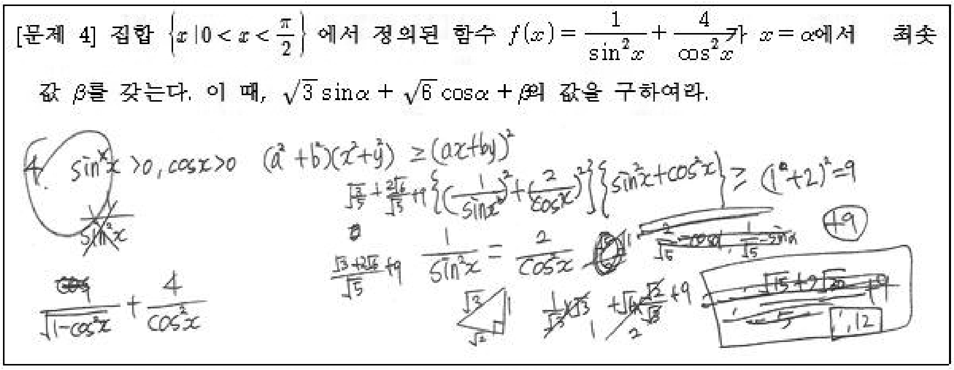
이 질문은 값이 변하는 두 식의 대소관계와 최솟값의 관계에 대한 것인데, 흔히 잘못된 풀이를 할 수 있는 문제이다.



연구 참여 교사들은 관찰기록지나 기록노트, 디지털카메라, 휴대폰을 들고 수업에 들어가 학생들이 노트나 칠판에 문제를 해결하는 과정이나 질문내용을 기록하였다. 전체 학생이 수업에 참여하도록 관리하면서도 개별 학생을 관찰하다보니 이전보다 수업하는 게 힘들다는 의견이 많았다.

② 학생이 수업시간이나 방과후에 과제를 해결한 노트를 걷어 관찰한 예 – 노트 오른쪽에 선생님에게 묻고 싶은 것이나 해결과정에서 특이했던 점을 기록하게 함.




[문제 4] 집합 $\left\{x \mid 0 < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{4}{\cos^2 x}$가 $x = \alpha$에서 최솟값 β를 갖는다. 이 때, $\sqrt{3}\sin\alpha + \sqrt{6}\cos\alpha + \beta$의 값을 구하여라.

"위 학생은 평소 수업시간에 흥미를 자극할 만한 내용이면 집중력이 높지만 그렇지 않으면 집중력이 떨어지는 학생이다. 해결과정에서 처음에는 $f(x)$를 $\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}+\frac{4}{\cos^2 x}$ 로 변형했으나 더 이상 진척이 없자 코시-슈바르츠 부등식을 쓰면 되겠다는 생각을 하게 되어 곧바로 문제를 해결하였다. 이렇게 아이디어를 잘 떠올리는 학생인 줄 몰랐는데 노트를 보면서 새로운 면을 알게 되었다."

③ 학생들이 칠판이나 전자칠판에 문제를 풀고 설명하는 것을 관찰

연구 교사들은 학생들을 관찰하기 위해 일제식 설명수업을 줄이고 학생들이 발표하거나 전체 토론을 하도록 유도했다. 이 과정에서 이전에는 몰랐던 학생들의 수학적 사고과정을 알게 되면서 교사의 수업에 대한 만족감이 향상되었고 수업이 좀 더 생동감있게 변화하게 되었다.



④ 개별 면담

학생들의 학습상의 필요를 정확히 알기 위해서 또는 그들의 수학적 사고과정을 알기 위해서 개별 면담을 실시하였다.

<table>
<tr><th colspan="4">면접 기록지</th></tr>
<tr><td>면접대상</td><td colspan="3">(2)학년 (7)반 이름 : ○○○ 성별 : 남</td></tr>
<tr><td>일시</td><td>10.25 13:10~13:25 / 10.31 15:40~16:00</td><td>면접교사</td><td>○○○ 교사</td></tr>
<tr><td>면접계획
(목적 진행 계획 등)</td><td colspan="3">· 면접 목적 : 학습부진의 원인과 공부하는 방법에 대한 면접
여러 가지 사각형의 정의와 성질에 대한 질문 및 지도(쪽지시험에서 틀린 문항의 개념)
· 수학 성적과 관계없이 교사가 학생에게 관심을 가지고 있다고 느끼도록 질문</td></tr>
<tr><td>면접 내용
(면접 과제
질문과 답변
학생 특성)</td><td colspan="3">1. 10월 25일
· 수업 준비물과 수업태도가 좋지 않은 이유는?
– 교과서를 분실하였고 학교 수업 시간에 공부하는 것 이외에 수학 공부를 하지 않기 때문에 전 시간에 배운 것을 기억하지 못한다.
· 새 교과서를 주고 매 시간 교과서에서 배운 내용을 노트에 정리한 것을 선생님이 점검해 주면 어떨까?
– 교과서를 감사하게 받고, 노트 점검에 대하여 호의적으로 반응함.
· 수학공부에 대한 흥미는 10점 만점 중에 몇 점인가?
– 0점이다. (기초실력 부족과 가정환경상 교사 이외에 동기부여를 해주는 사람이 없다.) 모든 교과 수업에 대한 열의가 떨어진다. 자기주도학습을 못하지만 공부를 해서 성적을 향상시키고 싶다.
· 다음 수업시간부터 개인적으로 개념 정리에 대한 노트검사를 하기로 함 · 멘토를 바꾸어 주기로 함 (본인이 원하는 멘토 학생으로 자리 교체)
2. 10월 31일
· 첫 번째 면접 후 태도가 좋아진 것에 대하여 칭찬을 함
· 틀린 문제에 대한 노트 정리를 검사하기로 함
· 여러 가지 사각형 내용 평가에서 틀린 개념에 대한 질문과 설명
– 직사각형, 마름모, 정사각형의 정의와 성질의 설명을 듣고 그림을 그려서 내용 확인
· 문제 풀이를 모두 맞게 풀었는데 본인이 풀었는지 확인
– 멘토의 답을 보고 쓴 것, 본인이 푼 문항을 솔직하게 말함.</td></tr>
<tr><td>면접 후
학생의 변화</td><td colspan="3">· 첫 번째 면접 후 수업태도가 눈에 띄게 좋아지고, 평소 교사를 피하던 학생이 친근하게 인사를 잘 함. 면접 이전에는 수업 시간에 노트필기도 끝까지 못하고 산만하였는데 면접 후에는 수업에 집중 하려고 노력함.
· 두 번째 면접 후 평가에서 틀린 개념들을 고쳐 검사를 받고 수업시간에 노트 필기한 것에 대한 점검을 받음. 이전에는 모르는 문제를 설명해 달라고 요청하지 않았는데, 면접 후 개별 학습 시간에 모르는 문제를 물어봄.</td></tr>
</table>

⑤ 전체 학생 면담

일주일 동안 수업시간이나 방과후에 전체 학생들을 대상으로 한 명씩 과제를 어떻게 해결하

는 지 설명하게 하여 학생들의 수학적 의사소통 능력, 추론능력을 파악하였다. 과제는 교과서 예제나 수업시간에 공부했던 것 중에서 골라 미리 알려 주고 제비뽑기를 하여 뽑힌 문제를 어떻게 해결하는 지 설명하고 교사는 추가질문을 던지는 방식으로 진행하였다.

연구 결과를 종합하면, 관찰과 면담을 통해 교사는 학생들의 학습 상황을 알게 되었고 자신의 수업을 반성하게 하였으며 학생에게도 자신의 학습 상황을 인지하게 해 주었다.
"이전에는 학생들을 의식적으로 관찰하려는 노력을 하지 않았다. 그런데 학생들이 지금 어떤 학습 상황에 놓여 있는지 의식적으로 보려고 하니까 보이더라. 학생들의 학습 상황에 대해 적극적으로 알려고 하지 않았던 이전의 내 모습을 반성하면서도 그것을 알게 된 지금은 그들을 도와줘야 할 일이 너무 많아 어떻게 해야 할지 걱정이다."
"독특한 아이디어로 문제를 해결하거나 개념을 접근한 경우 촬영하여 다음 학급에 소개하면 회차가 거듭될수록 수업 내용이 풍부해 지면서 수학적 사고가 주는 즐거움을 누릴 수 있었다."
관찰과 면담을 내신성적으로 반영한 경우도 있었는데 공정성, 신뢰도에 대한 시비는 크지 않았다. 이는 지속적인 관찰과 면담결과를 누적하여 기록하였기 때문에 시비가 생겨도 자료를 가지고 설명할 수 있었기 때문이다.
이상과 같이 관찰과 면담 평가가 평가의 본질을 회복하는 좋은 방법이라는 것을 확인했으나 학교현장에 확산되기에는 여러 가지 어려움이 있음을 알게 되었다. 교사가 수업과 평가에 이전보다 많은 시간을 쏟아야 하므로 힘이 들고, 처음 시도하는 경우 시행착오를 겪게 되면서 혼란을 겪게 되는데 이를 뒷받침할 지원이 없다는 것이다.

(3) 교과서와 평가 문제의 질 제고

발제자도 언급했듯이 우리나라 교과서에서 다루는 문제나 과제의 질이 세계 주요국에 비해 수학적 사고력면에서 수준이 낮다. 문제집에 있는 문제들도 조건과 구하는 것을 바꾸거나 복잡하게 한 것이며 이러한 문제를 숙달할 수 있도록 구성된 경우가 대부분이다. 현행 지필평가의 평가문항의 질도 마찬가지다. 이러한 과제로 수업에 참여하고 학습한 학생들이 사회가 요구하는 창의력을 키운다고 보장하기 어렵다. 따라서 교과서 뿐만 아니라 평가문항에서도 '구하라. 계산하라.'보다'비교하여라. 분석하여라. 종합하여라. 일반화하여라. 설명하여라.'등을 묻는 과제를 대폭 채용하고 이것을 매개로 학생들에게 수학적으로 사고하도록 안내하는 것이 필요하다.

(4) 새로운 평가방법을 시도하는 교사 확산 운동 필요

새로운 평가방법에 대한 공감은 하면서도 실천을 시도하는 교사가 적은 것은 앞서 말했듯이

공정성, 신뢰도에 대한 시비, 새로운 것에 대한 시도가 주는 혼란 때문이다. 새로운 평가방법을 시도하는 초기에는 채점을 할 때 학생간 변별을 매우 적게 두어 민원 발생의 소지를 줄이면 된다. 새로운 평가방법에 익숙해지면 자연스럽게 학생간 변별을 할 수 있게 되므로 점점 점수차를 두어도 된다. 단, 평가결과를 잘 모으고 출력해 두어서 임의로 채점한 것이 아님을 보여 줄 준비를 갖추어야 한다. 새로운 것을 시도하면서 겪는 혼란은 극복해야 할 상황이지 두려워할 대상이 아니다. 다만 새로운 평가를 시도하는 교사들을 격려하며 자료 제공, 방법에 대한 조언을 해 줄 조직이 필요하다. 교육청에서 이러한 조직을 만들고 교사출신의 전문인력을 파견하여 이러한 활동을 한다면 새로운 평가방법은 더욱 확산되고 평가 관행은 서서히 바뀔 것이다.

(5) 수학능력시험의 성격과 시행 방법 개선 필요

객관식 문항에 대한 점수는 낮추고 단답형 문항을 삭제하는 대신 서술형 문항을 도입하자는 발제자의 의견에 동감한다. 채점의 객관성에 대한 시비는 발제에서도 언급했듯이 채점자에게 서술형 문항에 대한 채점 기준, 채점 방법에 대한 충분한 연수를 통해 채점자간 차이를 줄이고 3명이상의 채점자를 거쳐 평균을 내는 방안을 쓰면 무리가 없어 보인다.

한 발 더 나아가 대학별로 치르고 있는 수리논술 성격의 시험을 일원화하여 교육과정평가원이 주관하는 방안을 제안한다. 고등학교 수학교사와 대학 교수님들이 모여 고등학교 교육과정의 범위를 넘지 않으면서도 학생들의 수학적 사고력을 평가하기에 좋은 문항을 제작하고, 수험생들의 답안지를 스캔한 후 지원자가 있는 대학에서 답안지를 내려받아 채점하도록 하는 방식으로 운영할 수 있다. 이렇게 되면 고등학교 교육과정 정상화에 기여할 뿐만 아니라 대학마다 출제방향이 달라 사교육에 의존하기 쉬운 대학별고사에 대한 관리가 가능하다는 장점도 있다.

세부역량을 성적표에 표기하고 학생 성취율을 획기적으로 제고해야 한다

김진우(좋은교사운동 공동대표)

토론자는 크게 1) 무엇을 평가할 것인가의 문제와 2) 평가 난이도와 성취율의 문제에 대해 토론하고자 한다.

무엇을 평가할 것인가

발제자는 인지적 영역 외에 정의적 영역도 평가할 필요성을 언급하고 또한 인지적 영역 중에서도 풀이의 과정에 대한 평가가 중시되어야 할 것을 말하였다. 그러나 실제로는 수능 평가 방식에 종속되어 저차원적인 능력에 국한되고 있음을 지적하고 이를 해결하기 위해 수행평가가 강화되어야 할 것을 강조하였다.
토론자는 기본적으로 동의하며 여기에 더하여 보다 구체적인 전략이 필요하다고 주장한다. 평가해야 할 핵심 역량을 구체적으로 세분화하여 이를 성적표 상에 명시하여야 한다. 수학에서 추구해야 하는 핵심역량을 분류하고 각 역량별로 평가함으로써 핵심 역량을 보다 중요하게 다룰 수 있기 때문이다.

왜 다수가 실패하는가?

근본적으로 우리는 학생들에게 어떤 목표를 제시해야 하는가? 하는 질문을 해야 한다. 즉 어떤 성취기준이 있다고 할 때 그 기준에 학생들이 도달할 수 있는가를 물어야 한다. 예를 들어 어떤 성취기준에 기초한 문제의 정답률이 10%라고 한다면 이 성취기준이 학생들에게 적합한 것인지를 따져보아야 한다. 왜 나머지 90%는 도달하지 못하는가? 그것이 학생의 문제

인지, 교사의 문제인지, 아니면 교육과정의 문제인지를 밝혀야 한다. 학생들도 열심히 하고, 교사들도 열심히 가르치는 데도 불구하고 90%가 실패하고 있다면 그것은 교육과정이 문제가 있다는 혐의를 받아야 함. 그 혐의의 내용은 과도한 분량이나 난이도 그리고 시간의 부족이 될 수 있다. 여러 정황은 교육과정의 문제를 지목한다. (대한민국 학생들의 수학 성취도는 세계적으로 상위권이고, 교사들의 수준도 가장 높은 것으로 나타나고 있음. 결국 수학 교육과정이 이 우수한 학생들을 실패자로 낙인찍고 있는 것임.) 만약 아무리 가르쳐도 근본적으로 대다수가 이해가 불가능한 것이라고 한다면 그것이 초중등학교 교육 목표로 제시되어서는 안 된다.
그렇다면 왜 그러한 교육과정을 운영하는가의 문제에 봉착한다. 그것은 당연히 변별을 위한 것이다. 그렇다면 변별을 위한 교육과정 운영이라는 것 자체의 정당성에 대해 물어야 한다. 이것은 대학 선발 구조와 관련된 문제로 귀결된다. 이와 관련하여 수능의 자격고사화 및 내신에 의한 질적인 평가와 관련한 논의가 전개된다. 토론자는 발표자와 마찬가지로 수능의 자격고사화와 내신의 질적 해석이라는 방향에 동의한다. 여기서는 현 상태에서 변별 위주의 수능이 가져오는 학교교육의 부작용을 지적하면서 이 문제를 어떻게 극복할 것인가에 대해 제시하고자 한다.

학생들의 성취율은 어느 정도가 합당한가?

핵심적인 질문은 이것이다. 어떤 성취기준에 대한 학생들의 성취율이 얼마이기를 기대하는 것이 합당한가? 결론부터 말하면 수학의 성취율의 목표를 90%의 학생들이 90% 수준에 도달하는 것으로 잡아야 한다. 이것이 너무 비현실적인가? 90%가 불가능하다고 주장하거나 90%가 되어서는 안 된다고 주장하는 사람은 그 이유를 밝혀야 한다. 되어서는 안 된다고 주장하는 사람은 변별의 필요성을 이야기할 텐데 그렇다면 그 변별을 위해 애초부터 실패자를 요구하는 것이 정당한지에 대해 해명해야 한다. 현실적으로 도달이 불가능하다고 주장한다면 그것은 학생의 문제인지, 교사의 문제인지, 교육과정의 문제인지를 밝혀야 하고, 그 원인이 해결 불가능하다는 이유를 설명해야 한다.
교육과정의 도달 목표는 대다수 학생들이 성취할 수 있는 수준이어야 타당하다. 여기서 대다수 학생의 의미는 정상적인 학습 능력을 지니고 있는 학생을 의미한다. 또한 공부를 포기하지 않고 어느 정도의 성실성을 지니고 있는 학생을 의미한다. 그 정도가 실제적으로 얼마냐에 대해서는 관점에 따라 다를 수가 있겠지만 직관적으로 5% 정도의 학습적 장애를 지니고 있는 학생이나, 아예 공부에 관심이 없는 학생들을 감안하면 10% 정도의 예외는 둘 수 있다고 생각한다.

다음으로 90%의 성취 수준이라는 의미는 교육과정에서 핵심적으로 도달해야 할 목표를 의미한다. 100%가 마땅하겠지만 약간 양보하여 변별의 필요성을 위해 10% 정도는 모두가 도달하지 못하는 목표를 제시할 수도 있을 것이다.

개인별 맞춤 교육으로 가능하다

그렇다면 90%의 학생이 90%의 성취에 도달하는 것이 현실적으로 가능한가? 도달의 가능성 여부는 투여된 시간과 관련이 있다. 빠른 학생은 1시간 만에 도달하는 목표라도 느린 학생은 2시간이 걸릴 수 있다. 만약 평가의 시점을 1시간으로 끊는다면 느린 학생은 도달에 실패한 것으로 나올 수밖에 없다. 그렇다면 그 학생들은 실패를 안고 또 다음 과제에 도전하는 꼴이 되어 결국 실패가 누적될 수밖에 없다. 현재 우리의 교육 체제는 바로 이러한 식으로 운영되고 있는 무책임한 구조라는 것이 문제다.

교육과정은 개인화되어야 한다. 빠른 학생들에게는 더 심화된 영역을 열어주는 한편 느린 학들에게는 기본을 목표로 충분한 지원을 하여야 한다. 정상적인 교육이라면 느린 학생들이 충분히 이해할 수 있도록 더 많은 지원을 해서 모두가 성취할 수 있도록 해야 한다. 결국 차이가 나는 것은 도달 목표가 아니라 도달 시간에 있는 것이다. 이를 위해 학교는 개인의 특성에 맞추어 지원을 해야 한다. 만약 지원이 잘 된다고 가정한다면 최종 성취율은 90%에 도달할 수 있을 것이라고 기대할 수 있다.

평가는 운전면허 시험의 개념을 가져야 한다. 운전면허는 변별을 하기 위함이 아니라 자격을 주기 위한 것이다. 이를 위한 절대 기준에 도달하는 것이 목표다. 카레이서를 위한 평가가 아니라 보통 사람을 위한 평가라면 당연히 통과할 때까지 기회가 주어져야 한다. 수학시험은 물론 모든 교과에서 평가하고자 하는 것이 결국 학생의 성공을 목표로 한다면 한 날 한 시에 획일적으로 평가해서 도달한 정도를 가지고 변별하기보다는 학생들에게 충분한 기회와 시간을 주고 난 다음 목표에 도달한 시점에 평가해서 성취를 확인해주는 도구로 바뀌어야 한다.

또 다시 변별에 대한 문제가 제기될 것인데 세 가지 방법이 있다. 첫째, 90%는 기본적으로 도달하되 나머지 10% 정도를 심화된 수준을 가지고 변별할 수 있다. 이 경우 변별을 하면서도 대다수 학생들에게 성취감을 줄 수 있다. 둘째, 도달시간을 기초로 변별을 할 수 있다. 셋째, 세부 핵심역량별로 나타나는 학습자의 다양한 특성을 질적으로 해석하여 변별을 할 수 있다. 이것이 가장 바람직하다고 본다.

성취기준별 도달 목표와 도달 시간을 제시하라

만약 현재 성취율이 평균으로 나타낼 때 50점도 안 되는 것이 현실이라면 이를 어떻게 할 것인지를 논의해야 한다. 변별을 위한 목적으로는 더 없이 효과적인 체제이지만 모든 학생의 성취라는 교육의 근본적인 목적을 위해서는 더없이 무책임하고 야만적이기까지 한 이러한 체제를 용인할 것인지를 물어야 한다.

일단 수학교육의 목표를 90%의 학생이 90%의 수준에 도달하는 것으로 설정한다면 그를 위한 방법론이 나올 수 있다. 과도한 분량과 난이도는 조절될 것이다. 그것은 임상적인 과정을 통해 조절되어야 한다. 예를 들어 피타고라스 정리를 증명하는 성취기준이 있다고 할 때 이것을 가르치기 위해서 어느 정도의 시간이 필요한지에 대한 임상적 증거들이 있어야 한다. 보통 아이들이 도달하기 위해서 필요한 시간과 느린 아이들이 도달하기 위한 시간이 통계적으로 산출될 수 있다. 이러한 실증적 증거들을 가지고 교육과정을 구성해야 한다.

이를 위해 교육과정 개발진에게 요청한다. 어떤 성취기준을 제시할 때는 그것에 대한 성취율의 목표를 제시하고 이를 위해 얼마의 시간이 필요한지를 제시해 줄 것을 요구한다. 이런 임상적 증거도 없이 성취기준을 제시하고 모두 가르치라고 하는 것은 무책임한 것이다. 성취율 목표를 제시하라고 하는 것은 그것이 반드시 가르쳐야 할 사항인지, 일부에게만 가르쳐야 할 사항인지를 구분하라는 것이다. 그리고 실제로 교실의 현장에서 가르치는 교사들의 경험을 바탕으로 소요되는 시간을 제시하여야 한다. 학생의 수준을 3단계로 구분한다면(흔히 하는 수준별 수업의 개념에 따라) 각 수준별로 목표에 도달할 수 있는 시간을 제시하여야 한다. 만약 하 수준의 학생이 상 수준에 비해 2배 이상의 시간이 걸린다고 한다면 이를 교육과정상에 반영하여 충분한 지원을 할 수 있도록 교육과정과 학교체제를 디자인해야 한다. 그렇지 않는 경우 이는 결국 공교육에서 사교육 수요를 촉발한다는 비판을 피할 수 없다. 하 수준의 학생들을 위해 추가적으로 소요되는 자원은 공교육에서 책임지고 제공해야 한다.

평가는 기본 수준으로 해야 한다

평가는 심화 수준을 기준으로 할 것이 아니라 기본 수준을 기준으로 하여야 한다. 내신은 물론, 수능도 기본적인 수준을 평가해야 한다. 굳이 변별을 하여야 할 경우에 일부만 심화 수준으로 평가할 수 있으나 최소한으로 되어야 한다. 결국 성취율의 목표 수준은 이를 둘러싼 싸움이 될 것이다. 시험을 어렵게 내고 변별을 하고자 할수록 학생들의 성취율은 떨어지고 좌절율은 높아지며 이로 인한 사교육 수요는 비례하여 증가할 것이다.

학력저하에 대한 우려가 있으나 보편적인 핵심 역량의 기본 수준을 높이는 한편 빠른 학생들

에게는 더 높은 수준을 열어줌으로써 학력저하가 아니라 전체적으로 학력향상이 될 것이다.

요약 및 결론

무엇을 가르칠 것인가의 문제에 있어 수학교육에서 달성되어야 할 핵심 역량을 세분화하여 성적표에 표기하여야 한다. 학생의 성취율을 90%의 학생이 90%의 수준에 도달하는 것을 목표로 하여 분량과 난이도를 조절하여야 한다. 이를 위해 교육과정상의 성취기준별로 임상적 근거에 기초하여 도달목표와 도달시간을 제시하여야 한다. 그리고 개인 맞춤형 교육을 하여야 하고 평가는 기본 수준에 맞추어 평가해야 한다.
현재 학생들의 주당 수학 공부시간이 심한 경우 거의 40시간에 육박한다고 한다.2)2) 발표문 재인용: 이과의 경우 주당 5단위짜리 수학 두 과목을 하면 수업 시간만 10시간, 예습이나 준비 그리고 복습과 숙제를 한다면 하루에 적어도 2시간 이상 걸리니 주당 10시간, 방과후 보충수업을 매일 1시간만 수강해도 주당 5시간, 학원이나 EBS 인강 등을 듣는데 주당 5시간, 이것을 예습하고 복습하는데 주당 5시간, 주말에 학원이나 인강이나 혼자 수학 공부하는 시간이 5시간만 돼도 벌써 40시간이 된다. 이 정도는 평범한 학생의 일과일 뿐이다. 만약 과외나 학원 수강이 더 추가되는 학생은 주당 수학 학습 시간은 40시간을 훌쩍 넘기게 된다.
이는 지나쳐도 너무 지나친 것이다. 수학에 들어가는 시간의 절반을 줄여서 인문학과 예체능에 투자하는 것이 민주시민교육과 학생의 삶의 질에 훨씬 도움이 될 것이다. 그것이 대다수 국민들이 원하는 개혁의 방향일 것이다.

종합 정리